МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ФИЛИАЛ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. НИЖНЕВАРТОВСКЕ**
Кафедра «Гуманитарные, естественнонаучные и технические дисциплины»

В.В. КОЛЕДИН

Прикладные задачи теории вероятностей

Методические указания
к выполнению практических работ
для обучающихся всех форм обучения
по направлению подготовки
«Программная инженерия»

НИЖНЕВАРТОВСК
2026

ББК 22.171
П 75

Одобрено
редакционно-издательским советом филиала

Прикладные задачи теории вероятностей **:** методические указания к выполнению практических работ для обучающихся всех форм обучения по направлению подготовки «Программная инженерия» / сост. В.В. Коледин. – Нижневартовск, 2026. – 44 с.

Методические указания соответствуют требованиям ФГОС ВО и компетенциям, необходимым для усвоения курса «Прикладные задачи теории вероятностей».

В методических указаниях даются описания практических работ и порядок их выполнения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Цель практикума:

Формирование практических навыков решения вероятностных и статистических задач с использованием Excel и Mathcad.

Требования к студентам:

- Базовые знания теории вероятностей
- Навыки работы с Windows, Excel (средний уровень)
- Знакомство с Mathcad или готовность к быстрому освоению

Организация работ:

9 практических работ по 4 часа каждая
- Индивидуальные варианты для каждого студента (10 вариантов)
- Сдача в двух форматах: Excel-файл + Mathcad-файл
- Защита: краткий устный отчет (2-3 минуты)

Система оценивания:

- Каждая ПР: 0-10 баллов
- Минимум для зачета: 60 баллов из 90
- Критерии: корректность расчетов, качество анализа, оформление

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

«Освоение инструментов: генерация данных и базовый анализ»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить генерацию случайных чисел с заданными распределениями в Excel и Mathcad, научиться строить гистограммы, рассчитывать статистические характеристики, сравнивать эмпирические и теоретические распределения.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Равномерное распределение U[a, b]

Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [a, b], если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке:

$f(x) = 1/(b - a)$, при $a \le x \le b$
$F(x) = (x - a)/(b - a)$, при $a \le x \le b$

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание: $E\xi = (a + b)/2$
- Дисперсия: $D\xi = (b - a)^2/12$
- Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{D\xi}$

2.2. Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ (среднее) и σ^2 (дисперсия):

$f(x) = 1/(\sigma\sqrt{(2\pi)}) \cdot \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание: $E\xi = \mu$
- Дисперсия: $D\xi = \sigma^2$
- Стандартное отклонение: σ

2.3. Биномиальное распределение Bin(n, p)

Случайная величина ξ — число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p:

P(ξ = k) = Cn^k · p^k · (1-p)^{n-k}, где k = 0, 1, 2, ..., n
Cn^k = n!/(k!·(n-k)!)

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание: $E\xi = n \cdot p$
- Дисперсия: $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p)$

- Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

2.4. Основные статистические характеристики

Характеристика	Формула	Excel
Выборочное среднее	$\bar{X} = (1/n)\sum x_i$	=СРЗНАЧ(диапазон)
Выборочная дисперсия	$S^2 = 1/(n-1) \cdot \sum(x_i-\bar{X})^2$	=ДИСП.В(диапазон)
Стандартное отклонение	$S = \sqrt{S^2}$	=СТАНДОТКЛОН.В(диапазон)
Медиана	значение, делящее выборку пополам	=МЕДИАНА(диапазон)
Минимум	$\min(x_i)$	=МИН(диапазон)
Максимум	$\max(x_i)$	=МАКС(диапазон)

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Каждому студенту присваивается номер N от 1 до 10. Все расчеты выполняются с индивидуальными параметрами:

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
a	$5 \cdot N$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
b	$5 \cdot N+20$	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
μ	$50+3 \cdot N$	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80
σ	$5+0.5 \cdot N$	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
n	$10+2 \cdot N$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
p	$0.1+0.03 \cdot N$	0.13	0.14	0.19	0.22	0.25	0.28	0.31	0.34	0.37	0.40
m	$50+10 \cdot N$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150

где:

- a, b — параметры равномерного распределения
- μ, σ — параметры нормального распределения
- n, p — параметры биномиального распределения
- m — объем выборки для каждого распределения

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните его как: Фамилия_Имя_Группа_ПР1.xlsx

2. Создайте лист «Параметры» со следующей таблицей:

A	B	C
Номер варианта:	N	(ваш номер)
a =	= 5*B1	
b =	= 5*B1+20	
μ =	= 50+3*B1	
σ =	= 5+0.5*B1	
n =	= 10+2*B1	

p =	= 0.1+0.03*B1	
m =	= 50+10*B1	

4.2. Равномерное распределение

1. Создайте лист «Равномерное»

2. В ячейку A3 введите: «№ п/п», в B3: «Значение»

3. В столбце A создайте номера от 1 до m (например, для N=3: A4=1, A5=2, протянуть до A83)

4. В ячейку B4 введите формулу:

=СЛЧИС()*(Параметры!$B$3-Параметры!$B$2)+Параметры!$B$2

Пояснение: Параметры!$B$3 — ссылка на ячейку B3 листа «Параметры» (параметр b), $ — абсолютная ссылка (не меняется при копировании).

5. Скопируйте формулу из B4 вниз до строки с номером m+3.

6. Рассчитайте статистические характеристики:

Ячейка	Формула	Описание
D4	=СЧЁТ(B4:B83)	Объем выборки
D5	=МИН(B4:B83)	Минимум
D6	=МАКС(B4:B83)	Максимум
D7	=СРЗНАЧ(B4:B83)	Среднее
D8	=ДИСП.В(B4:B83)	Дисперсия
D9	=СТАНДОТКЛОН.В(B4:B83)	Стандартное отклонение
D10	=МЕДИАНА(B4:B83)	Медиана

7. Рассчитайте теоретические значения:

Ячейка	Формула
E4	=Параметры!$B$8
E5	=Параметры!$B$2
E6	=Параметры!$B$3
E7	=(Параметры!$B$2+Параметры!$B$3)/2
E8	=(Параметры!$B$3-Параметры!$B$2)^2/12
E9	=КОРЕНЬ(E8)
E10	=(Параметры!$B$2+Параметры!$B$3)/2

8. Постройте гистограмму:

- В столбце G создайте границы интервалов (от a до b с шагом (b-a)/10)
- Выделите столбец H (напротив границ)
- Введите формулу массива: =ЧАСТОТА(B4:B83; G4:G14)

- Нажмите Ctrl+Shift+Enter
- Выделите G4:H14 → Вставка → Гистограмма

4.3. Нормальное распределение

1. Создайте лист «Нормальное»

2. В ячейку A3 введите: «№ п/п», в B3: «Значение»

3. В столбце A создайте номера от 1 до m

4. В ячейку B4 введите формулу:

=НОРМ.ОБР(СЛЧИС(); Параметры!$B$4; Параметры!$B$5)

Скопируйте вниз до строки m+3.

5. Рассчитайте статистические характеристики (аналогично равномерному распределению).

6. Рассчитайте теоретические значения:

- Среднее: =Параметры!$B$4
- Дисперсия: =Параметры!$B$5^2
- Стандартное отклонение: =Параметры!$B$5

7. Проверьте правило 3σ:

- Рассчитайте доли значений в интервалах μ±σ, μ±2σ, μ±3σ
- Сравните с теоретическими 68.3%, 95.5%, 99.7%

4.4. Биномиальное распределение

1. Создайте лист «Биномиальное»

2. Для генерации биномиальной величины нужно создать n столбцов с испытаниями Бернулли:

- В ячейку C4 введите: =ЕСЛИ(СЛЧИС()<Параметры!$B$7; 1; 0)
- Скопируйте C4 вправо до столбца с номером n (например, для N=3, n=16, копируем до столбца R)
- Выделите все эти ячейки (C4:R4) и скопируйте вниз до строки m+3

3. В ячейку B4 введите сумму по строке:

=СУММ(C4:R4)

Скопируйте вниз.

4. Постройте эмпирическое распределение:

- В столбце T создайте значения k от 0 до n
- В столбце U рассчитайте частоты: =СЧЁТЕСЛИ($B$4:$B$83; T4)

- В столбце V рассчитайте теоретические вероятности:

=ЧИСЛКОМБ(Параметры!$B$6;T4)*Параметры!$B$7^T4*(1-Параметры!$B$7)^(Параметры!$B$6-T4)

Или используйте встроенную функцию:

=БИНОМ.РАСП(T4; Параметры!$B$6; Параметры!$B$7; ЛОЖЬ)

5. Постройте сравнительную диаграмму (столбцы — эмпирические частоты, точки — теоретические вероятности).

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

5.1. Создание документа

1. Откройте Mathcad и создайте новый документ.
2. Сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР1.mcdx

5.2. Определение параметров

Введите следующие строки (для N=3):

Лабораторная работа №1

Освоение инструментов: генерация данных и базовый анализ

Студент: [Ваше ФИО]
Группа: [Номер группы]
Вариант: N := 3

// Определение параметров
a := 5·N // a = 15
b := 5·N + 20 // b = 35
μ := 50 + 3·N // μ = 59
σ := 5 + 0.5·N // σ = 6.5
n := 10 + 2·N // n = 16
p := 0.1 + 0.03·N // p = 0.19
m := 50 + 10·N // m = 80

Примечание: Точка посередине (·) — знак умножения (Ctrl+8).

5.3. Равномерное распределение

// Теоретические характеристики

E_unif := (a + b)/2 // Eξ = 25
D_unif := (b - a)^2/12 // Dξ = 33.333
σ_unif := √D_unif // σ = 5.774

// Плотность распределения

f_unif(x) := if(a ≤ x ≤ b, 1/(b - a), 0)

// Функция распределения

F_unif(x) := if(x < a, 0, if(x ≤ b, (x - a)/(b - a), 1))

// График плотности

x_unif := a - 5, a - 4.9 .. b + 5

Для построения графика:

1. Нажмите @ (Shift+2)
2. В нижней позиции введите: x_unif
3. В левой позиции введите: f_unif(x_unif)

5.4. Нормальное распределение

// Теоретические характеристики

E_norm := μ
D_norm := σ^2
σ_norm := σ

// Плотность (встроенная функция)
f_norm(x) := dnorm(x, μ, σ)

// Функция распределения
F_norm(x) := pnorm(x, μ, σ)

// Правило 3σ
P_1σ := F_norm(μ + σ) - F_norm(μ - σ)   // ≈ 0.6827
P_2σ := F_norm(μ + 2·σ) - F_norm(μ - 2·σ) // ≈ 0.9545
P_3σ := F_norm(μ + 3·σ) - F_norm(μ - 3·σ) // ≈ 0.9973

// График плотности
x_norm := μ - 4·σ, μ - 3.9·σ .. μ + 4·σ

5.5. Биномиальное распределение

// Теоретические характеристики
E_binom := n·p
D_binom := n·p·(1 - p)
σ_binom := √D_binom

// Вероятности P(ξ = k)
k := 0 .. n
P_binom_k := dbinom(k, n, p)

// График

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое из трех распределений имеет наибольший разброс в вашем варианте? Почему?
2. Насколько эмпирические характеристики отличаются от теоретических?
3. Почему для биномиального распределения нельзя построить плотность?
4. Как изменились бы результаты при увеличении объема выборки m в 10 раз?
5. Какая функция в Excel генерирует случайное число от 0 до 1?
6. Что означают знаки $ в формулах Excel?
7. Как в Mathcad задать кусочную функцию (например, плотность равномерного распределения)?

7. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

Отчет должен содержать:

1. Титульный лист с названием работы, ФИО студента, группой, вариантом.
2. Цель работы.
3. Индивидуальные параметры (таблица).
4. Результаты в Excel:
   - Скриншоты или описание полученных таблиц
   - Гистограммы для всех трех распределений
   - Таблицы сравнения эмпирических и теоретических характеристик
5. Результаты в Mathcad:
   - Код с определениями параметров и функций
   - Полученные графики
6. Выводы по каждому распределению.
7. Ответы на контрольные вопросы.

8. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Баллы	Критерии
9-10	Все задания выполнены полностью и правильно. Формулы в Excel корректны, используются абсолютные ссылки. В Mathcad все расчеты сопровождаются комментариями. Графики информативны, правильно подписаны. Выводы глубокие.
7-8	Основные задания выполнены, есть незначительные ошибки. Графики построены, но оформление недостаточное. Выводы поверхностные.
5-6	Выполнено не менее 70% заданий. Есть ошибки в формулах или расчетах. Графики построены с ошибками. Выводы отсутствуют.
0-4	Выполнено менее 70% заданий. Грубые ошибки в расчетах. Работа сдана не в срок.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

«БИНОМИАЛЬНОЕ И ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить моделирование биномиального и пуассоновского распределений, исследовать условия аппроксимации, применить к задачам контроля качества.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Схема Бернулли

Серия из n независимых испытаний, в каждом из которых возможны два исхода: "успех" с вероятностью p и "неудача" с вероятностью q = 1-p.

2.2. Биномиальное распределение Bin(n, p)

Вероятность получить ровно k успехов в n испытаниях:

$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, где k = 0, 1, 2, ..., n

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание: $E\xi = n \cdot p$
- Дисперсия: $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p)$

2.3. Распределение Пуассона Pois(λ)

Моделирует число редких событий за фиксированный интервал времени или пространства:

$P(\xi = k) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, где k = 0, 1, 2, ...

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание: $E\xi = \lambda$
- Дисперсия: $D\xi = \lambda$

2.4. Аппроксимация биномиального распределения пуассоновским

При больших n и малых p: $Bin(n, p) \approx Pois(\lambda = n \cdot p)$

Условия применимости:
- $n \geq 20$
- $p \leq 0.1$
- $\lambda = n \cdot p \leq 10$

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Каждому студенту присваивается номер N от 1 до 10. Все расчеты выполняются с индивидуальными параметрами:

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
p	0.01+0.003·N	0.013	0.016	0.019	0.022	0.025	0.028	0.031	0.034	0.037	0.040
n	50+5·N	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
λ	n·p	0.715	0.96	1.235	1.54	1.875	2.24	2.635	3.06	3.515	4.0
M	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР2.xlsx

2. Создайте лист «Параметры»:

A	B
Номер варианта:	N
p =	= 0.01+0.003*B1
n =	= 50+5*B1
λ =	= B2*B1
M =	100

4.2. Моделирование проверок

1. Создайте лист «Моделирование»

2. В ячейку A3 введите: «Номер проверки», в B3: «Число бракованных»

3. В столбце A создайте номера от 1 до 100 (A4=1, A5=2, протянуть до A103)

4. Для генерации биномиальной величины нужно создать n столбцов с испытаниями Бернулли:

- В ячейку C4 введите: =ЕСЛИ(СЛЧИС()<Параметры!$B$2; 1; 0)
- Скопируйте C4 вправо до столбца с номером n (например, для N=3, n=65, копируем до столбца BQ)
- Выделите все эти ячейки (C4:BQ4) и скопируйте вниз до строки 103

5. В ячейку B4 введите сумму по строке:

=СУММ(C4:BQ4)

Скопируйте вниз.

4.3. Анализ распределения

1. Создайте таблицу частот:

E	F	G	H
k	Эмпирическая частота	Биномиальная теория	Пуассоновская теория

2. В столбце E создайте значения k от 0 до 10

3. В ячейку F4 введите:

=СЧЁТЕСЛИ($B$4:$B$103; E4)

Скопируйте вниз.

4. В ячейку G4 введите:

=БИНОМ.РАСП(E4; Параметры!$B$3; Параметры!$B$2; ЛОЖЬ)*Параметры!$B$5

Скопируйте вниз.

5. В ячейку H4 введите:

=ПУАССОН.РАСП(E4; Параметры!$B$4; ЛОЖЬ)*Параметры!$B$5

Скопируйте вниз.

4.4. Построение графиков

1. Выделите диапазон E4:H14
2. Вставка → Гистограмма → Гистограмма с группировкой
3. Добавьте заголовок: «Сравнение биномиального и пуассоновского распределений»
4. Настройте легенду: столбцы — эмпирические частоты, линии — теоретические

4.5. Расчет вероятностей

Создайте таблицу:

J	K	L	M
Вероятность	Бином	Пуассон	Разность
P(ξ=0)	=БИНОМ.РАСП(0; n; p; ЛОЖЬ)	=ПУАССОН.РАСП(0; λ; ЛОЖЬ)	=ABS(K4-L4)
P(ξ≤1) |	=БИНОМ.РАСП(1; n; p; ИСТИНА)	=ПУАССОН.РАСП(1; λ; ИСТИНА)	=ABS(K5-L5)
P(ξ≥1)	=1-БИНОМ.РАСП(0; n; p; ЛОЖЬ)	=1-ПУАССОН.РАСП(0; λ; ЛОЖЬ)	=ABS(K6-L6)
P(ξ≥3)	=1-БИНОМ.РАСП(2; n; p; ИСТИНА)	=1-ПУАССОН.РАСП(2; λ; ИСТИНА)	=ABS(K7-L7)

4.6. Проверка условий аппроксимации

Создайте таблицу:

Условие	Проверка	Выполняется?
n ≥ 20	=Параметры!B3	=ЕСЛИ(A2>=20;"да";"нет")
p ≤ 0.1	=Параметры!B2	=ЕСЛИ(A3<=0.1;"да";"нет")
λ ≤ 10	=Параметры!B4	=ЕСЛИ(A4<=10;"да";"нет")

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

5.1. Определение параметров

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

БИНОМИАЛЬНОЕ И ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

```
N := 3
p := 0.01 + 0.003·N     // p = 0.019
n := 50 + 5·N           // n = 65
λ := n·p                // λ = 1.235
M := 100
```

5.2. Биномиальное распределение

```
// Теоретические характеристики
E_bin := n·p
D_bin := n·p·(1 - p)
σ_bin := √D_bin

// Вероятности
k := 0 .. 10
P_bin_k := dbinom(k, n, p)
```

5.3. Пуассоновское распределение

```
// Теоретические характеристики
E_pois := λ
D_pois := λ
σ_pois := √λ

// Вероятности
P_pois_k := dpois(k, λ)
```

5.4. Сравнительный график

```
// Вставьте график (@)
// Нижняя ось: k
// Левая ось: P_bin_k, P_pois_k
```

5.5. Анализ точности аппроксимации

```
// Максимальная абсолютная ошибка
```

```
error_max := max(|P_bin_k - P_pois_k|)

// Относительная ошибка для k=0
error_rel0 := |P_bin_k0 - P_pois_k0|/P_bin_k0

// Проверка условий
cond1 := n ≥ 20
cond2 := p ≤ 0.1
cond3 := λ ≤ 10
```

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких условиях пуассоновская аппроксимация биномиального распределения точна?
2. Как изменится распределение числа бракованных, если увеличить объем выборки n в 2 раза?
3. Почему для обнаружения малого процента брака нужны большие выборки?
4. В чем практический смысл вероятности $P(\xi \geq 1)$ (обнаружить хотя бы один брак)?
5. Какая связь между λ в распределении Пуассона и параметрами биномиального распределения?
6. Что произойдет с точностью аппроксимации, если p увеличится до 0.2?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

«Нормальное распределение. Правило 3Σ. Контроль качества»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Научиться работать с нормальным распределением, проверить правило 3σ, решить задачи контроля качества с допусками.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$

Плотность нормального распределения:

$f(x) = 1/(\sigma\sqrt{(2\pi)}) \cdot \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$

Свойства:
- Симметрично относительно μ
- Точки перегиба при $x = \mu \pm \sigma$
- Правило 3σ: $P(|\xi-\mu| < \sigma) \approx 0.683$, $P(|\xi-\mu| < 2\sigma) \approx 0.955$, $P(|\xi-\mu| < 3\sigma) \approx 0.997$

2.2. Стандартизация

Если $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $Z = (\xi - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$

2.3. Процент брака

При контроле качества задаются допустимые границы [L, U]. Процент брака:

$P(\text{брак}) = P(\xi < L) + P(\xi > U)$

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
μ	50+2·N	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70
σ	1+0.2·N	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
допуск	2+0.3·N	2.3	2.6	2.9	3.2	3.5	3.8	4.1	4. 4	4.7	5.0
m	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

Создайте лист «Параметры» с вашими значениями и формулами.

4.2. Генерация данных

1. Создайте лист «Измерения»
2. Сгенерируйте 200 значений $N(\mu, \sigma^2)$: =НОРМ.ОБР(СЛЧИС(); μ; σ)
3. Рассчитайте отклонения от номинала: =B4 - μ

4. Проверьте, в допуске ли деталь: =ЕСЛИ(И(B4>=μ-допуск; B4<=μ+допуск); "Да"; "Нет")

4.3. Проверка правила 3σ

Рассчитайте доли значений в интервалах:

Интервал	Формула
μ±σ	=(СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">"&(μ-σ))-СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">="&(μ+σ)))/200
μ±2σ	=(СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">"&(μ-2σ))-СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">="&(μ+2σ)))/200
μ±3σ	=(СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">"&(μ-3σ))-СЧЁТЕСЛИ(B4:B203;">="&(μ+3σ)))/200

4.4. Анализ брака

Теоретический процент брака:

= (1-НОРМ.РАСП(μ+допуск; μ; σ; ИСТИНА) + НОРМ.РАСП(μ-допуск; μ; σ; ИСТИНА))*100

Эмпирический процент брака:

= СЧЁТЕСЛИ(D4:D203; "Нет")/200*100

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

```
// Параметры
μ := 56
σ := 1.6
допуск := 2.9

// Плотность
f(x) := dnorm(x, μ, σ)

// Правило 3σ теоретически
P1 := pnorm(μ+σ, μ, σ) - pnorm(μ-σ, μ, σ)
P2 := pnorm(μ+2σ, μ, σ) - pnorm(μ-2σ, μ, σ)
P3 := pnorm(μ+3σ, μ, σ) - pnorm(μ-3σ, μ, σ)

// Процент брака
P_брак := 1 - (pnorm(μ+допуск, μ, σ) - pnorm(μ-допуск, μ, σ))
```

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

«ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментально убедиться в действии центральной предельной теоремы (ЦПТ), исследовать скорость сходимости к нормальному распределению в зависимости от объема выборки и формы исходного распределения.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Центральная предельная теорема

Если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то при $n \to \infty$ распределение выборочного среднего

$$\bar{X}_n = (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n)/n$$

стремится к нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Стандартизованная форма:

$$Z_n = (\bar{X}_n - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \to N(0,1)$$

2.2. Практическое значение ЦПТ

- Неважно, какое исходное распределение
- Средние больших выборок приблизительно нормальны
- Стандартная ошибка среднего = $\sigma/\sqrt{n}$
- Позволяет строить доверительные интервалы и проверять гипотезы

2.3. Скорость сходимости

Зависит от формы исходного распределения:
- Быстрее для симметричных распределений
- Медленнее для асимметричных с тяжелыми хвостами
- Практическое правило: при $n \geq 30$ аппроксимация обычно удовлетворительна

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Каждому студенту присваивается номер N от 1 до 10. Тип исходного распределения определяется по остатку от деления N на 4:

N mod 4	Тип распределения	Параметры
1	Показательное Exp(λ)	$\lambda = 0.1 + 0.04 \cdot N$
2	Равномерное U[a,b]	a = 0, b = 10 + N
3	Биномиальное Bin(n,p)	n = 10 + N, p = 0.3
0	Смесь двух нормальных	$0.5 \cdot N(0,1) + 0.5 \cdot N(3,1)$

Общие параметры для всех вариантов:
- Малый объем выборки: n_1 = 5
- Большой объем выборки: n_2 = 30
- Число экспериментов: M = 1000

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР4.xlsx

2. Создайте лист «Параметры»:

A	B
Номер варианта:	N
Тип распределения:	(введите текст)
Параметр 1:	(по варианту)
Параметр 2:	(по варианту)
n_1 (малый)	5
n_2 (большой)	30
M (экспериментов)	1000

4.2. Генерация исходных данных

1. Создайте лист «Исходные данные»

2. В столбце A создайте номера от 1 до M (1..1000)

3. В столбце B сгенерируйте M значений в зависимости от вашего распределения:

Для показательного:

= -1/Параметры!$B$3 * LN(СЛЧИС())

или

=ЭКСП.ОБР(СЛЧИС(); 1/Параметры!$B$3)

Для равномерного:

=СЛЧИС() * Параметры!$B$3

Для биномиального:
Создайте n столбцов с формулой =ЕСЛИ(СЛЧИС()<0.3;1;0), затем сумму по строке

Для смеси:

=ЕСЛИ(СЛЧИС()<0.5; НОРМ.ИНВ(СЛЧИС();0;1); НОРМ.ИНВ(СЛЧИС();3;1))

4. Постройте гистограмму исходных данных.

4.3. Моделирование выборочных средних (n_1 = 5)

1. Создайте лист «Средние n=5»

2. Нужно создать 5 столбцов с исходными данными, затем среднее по строке:

- В столбцах B:F сгенерируйте по M значений из вашего распределения (используйте те же формулы)
- В столбце G рассчитайте среднее: =СРЗНАЧ(B4:F4)
- Скопируйте вниз

3. Постройте гистограмму для средних (столбец G).

4. Рассчитайте статистики для средних:
- Среднее средних: =СРЗНАЧ(G4:G1003)
- Стандартное отклонение средних: =СТАНДОТКЛОН.В(G4:G1003)

4.4. Моделирование выборочных средних (n_2 = 30)

1. Создайте лист «Средние n=30»

2. Создайте 30 столбцов с исходными данными, затем среднее по строке.

3. Постройте гистограмму и рассчитайте статистики.

4.5. Сравнение результатов

Создайте сводную таблицу:

Характеристика	Теория	n=5 (эмпир.)	n=30 (эмпир.)
Среднее	μ	=...	=...
Станд.откл.	σ	=...	=...
Станд.ошибка	σ/√n	σ/√5	σ/√30

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

5.1. Определение параметров

Лабораторная работа №4

Экспериментальная проверка ЦПТ

N := 3
n1 := 5
n2 := 30
M := 1000

// Для показательного распределения (пример для N=3)
λ := 0.1 + 0.04·N   // λ = 0.22
μ_exp := 1/λ   // μ = 4.545
σ_exp := 1/λ   // σ = 4.545

5.2. Теоретические зависимости

// По ЦПТ: средние ~ N(μ, σ²/n)
μ_n1 := μ_exp
σ_n1 := σ_exp/√n1

μ_n2 := μ_exp
σ_n2 := σ_exp/√n2

// Плотности
f_orig(x) := dexp(x, λ)
f_n1(x) := dnorm(x, μ_n1, σ_n1)
f_n2(x) := dnorm(x, μ_n2, σ_n2)

5.3. Моделирование в Mathcad

// Генерация исходных данных
i := 0 .. M-1
X_i := rexp(M, λ)

// Выборочные средние при n=5
Для средних при n=5 нужно организовать матрицу M×n1

5.4. Графики для сравнения

Постройте на одном графике:
1. Гистограмму исходных данных
2. Гистограмму средних при n=5
3. Гистограмму средних при n=30
4. Теоретическую нормальную кривую для n=30

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Для вашего исходного распределения: насколько быстро происходит сходимость к нормальному?
2. Почему стандартное отклонение средних уменьшается как 1/√n?
3. При каком объеме выборки распределение средних стало визуально неотличимо от нормального?
4. Какое практическое значение имеет ЦПТ для анализа данных?
5. Когда ЦПТ неприменима или сходится очень медленно?
6. Как изменились бы результаты, если бы мы брали не средние, а суммы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

«Доверительные интервалы для среднего и доли»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Научиться строить доверительные интервалы для среднего и доли, понимать влияние объема выборки и уровня доверия, применять для анализа данных.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Доверительный интервал (ДИ)

Интервал, который с заданной вероятностью (уровнем доверия 1-α) накрывает истинное значение параметра.

2.2. ДИ для среднего при известной дисперсии

$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

где $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

2.3. ДИ для среднего при неизвестной дисперсии

$\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot S/\sqrt{n}$

где $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с n-1 степенью свободы.

2.4. ДИ для доли

$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

где $\hat{p} = k/n$ — выборочная доля.

2.5. Значения квантилей

Уровень доверия	α	$z_{1-\alpha/2}$
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.960
99%	0.01	2.576

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
μ (истинное)	100+5·N	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
σ (известное)	10+N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p (истинная доля)	0.1+0.03·N	0.13	0.16	0.19	0.22	0.25	0.28	0.31	0.34	0.37	0.40
Объемы	20, 50, 100										

выборок	
Уровни доверия	90%, 95%, 99%

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР5.xlsx

2. Создайте лист «Параметры» с вашими значениями.

4.2. ДИ для среднего (n=100)

1. Создайте лист «ДИ среднего»

2. Сгенерируйте 100 значений из N(μ, σ²):

=НОРМ.ОБР(СЛЧИС(); Параметры!$B$2; Параметры!$B$3)

3. Рассчитайте выборочное среднее: =СРЗНАЧ(B4:B103)

4. Рассчитайте выборочное стандартное отклонение: =СТАНДОТКЛОН.В(B4:B103)

5. Для 95% ДИ:
   - Найдите t-квантиль: =СТЬЮДЕНТ.ОБР(0.975; 99)
   - Погрешность: =F4 * G4/КОРЕНЬ(100)
   - Нижняя граница: =E4 - H4
   - Верхняя граница: =E4 + H4

6. Используйте Пакет анализа:
   - Данные → Анализ данных → Описательная статистика
   - Отметьте «Уровень надежности: 95%»

4.3. Влияние объема выборки

1. Возьмите первые 20 значений, постройте 95% ДИ
2. Возьмите первые 50 значений, постройте 95% ДИ
3. Возьмите все 100 значений, постройте 95% ДИ
4. Создайте таблицу и график зависимости ширины ДИ от n.

4.4. Влияние уровня доверия

Для выборки n=100 постройте ДИ для уровней 90%, 95%, 99%:

Уровень	t-квантиль	Погрешность	Ширина
90%	=СТЬЮДЕНТ.ОБР(0.95; 99)	...	...
95%	=СТЬЮДЕНТ.ОБР(0.975; 99)	...	...
99%	=СТЬЮДЕНТ.ОБР(0.995; 99)	...	...

4.5. ДИ для доли

1. Создайте лист «ДИ доли»

2. Сгенерируйте 100 испытаний Бернулли с вероятностью p:

   =ЕСЛИ(СЛЧИС()<Параметры!$B$4; 1; 0)

3. Рассчитайте выборочную долю: =СУММ(B4:B103)/100

4. Для 95% ДИ:

   - z-квантиль: =НОРМ.СТ.ОБР(0.975)
   - Погрешность: =D4 * КОРЕНЬ(E4*(1-E4)/100)
   - Нижняя граница: =E4 - F4
   - Верхняя граница: =E4 + F4

4.6. «Бегущие» доверительные интервалы

1. Создайте столбец с накопленным средним от 10 до 100 наблюдений
2. Создайте столбец с накопленной стандартной ошибкой
3. Постройте график: среднее и доверительные границы от объема выборки

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

Лабораторная работа №5

Доверительные интервалы

```
N := 3
μ := 100 + 5·N      // μ = 115
σ := 10 + N         // σ = 13
p := 0.1 + 0.03·N   // p = 0.19
n := 100
α_95 := 0.05

// t-квантиль
t_crit := qt(1 - α_95/2, n - 1)

// Генерация выборки
i := 0 .. n-1
X_i := rnorm(1, μ, σ)

// Выборочные характеристики
X̄ := mean(X)
S := stdev(X)

// Доверительный интервал
Δ := t_crit · S / √n
CI_lower := X̄ - Δ
CI_upper := X̄ + Δ
```

```
// Для доли
k := rbinom(1, n, p)
p̂ := k/n
z_crit := qnorm(1 - α_95/2, 0, 1)
Δ_prop := z_crit · √(p̂·(1 - p̂)/n)
CIp_lower := p̂ - Δ_prop
CIp_upper := p̂ + Δ_prop
```

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему для среднего при неизвестной дисперсии используется t-распределение, а не нормальное?
2. Как ширина доверительного интервала зависит от:
   - объема выборки?
   - уровня доверия?
   - стандартного отклонения?
3. Что означает «уровень доверия 95%» на практике?
4. Как планировать объем выборки для достижения нужной точности?
5. Почему доверительный интервал для доли уже при $\hat{p}$ близких к 0 или 1?
6. Что произойдет с шириной ДИ, если увеличить выборку в 4 раза?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

«ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. А/В ТЕСТИРОВАНИЕ»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить процедуру проверки статистических гипотез, научиться проводить А/В тесты, понимать ошибки I и II рода, рассчитывать мощность критерия.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Основные понятия

- Нулевая гипотеза H_0: основное утверждение (обычно «нет эффекта»)
- Альтернативная гипотеза H_1: то, что хотим доказать
- Уровень значимости α: вероятность отвергнуть H_0, когда она верна (ошибка I рода)
- Ошибка II рода β: вероятность не отвергнуть H_0, когда верна H_1
- Мощность критерия: 1-β — вероятность обнаружить эффект, если он есть
- p-value: вероятность получить такие или более крайние данные при условии H_0

2.2. Проверка гипотезы о равенстве среднего заданному значению

Статистика критерия (t-тест):

$t = (\bar{X} - \mu_0) / (S/\sqrt{n})$

2.3. Проверка гипотезы о равенстве двух долей (А/В тест)

Статистика критерия:

$z = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) / \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}$

где $\hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2)$ — объединенная оценка доли.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
p_A (контроль)	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
p_B (наблюдаемое)	0.04+0.005·N	0.045	0.05	0.055	0.06	0.065	0.07	0.075	0.08	0.085	0.09
p_B (реальное)	0.04+0.008·N	0.048	0.056	0.064	0.072	0.08	0.088	0.096	0.104	0.112	0.12
n_A, n_B	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
α	0.05										

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР6.xlsx

2. Создайте лист «Параметры» с вашими значениями.

4.2. Одновыборочный тест для доли

1. Сформулируйте гипотезы:
   - H_0: $p\_B = p\_A$ (новая версия не лучше)
   - H_1: $p\_B > p\_A$ (новая версия лучше) — правосторонний тест

2. Рассчитайте наблюдаемую статистику:

   $z\_набл = (\hat{p}\_B - p\_A) / \sqrt{(p\_A \cdot (1-p\_A)/n\_B)}$

   В Excel:

   = (Параметры!B3 - Параметры!B2) / КОРЕНЬ(Параметры!B2*(1-Параметры!B2)/500)
3. Найдите p-value:

   = 1 - НОРМ.СТ.РАСП(z_набл; ИСТИНА)

4. Примите решение:
   - Если p-value < α → отвергаем H_0
   - Иначе → не отвергаем H_0

5. Сделайте вывод на простом языке.

4.3. Двухвыборочный тест

1. Сгенерируйте данные для двух групп:
   - В группе A: 500 испытаний с вероятностью p_A
   - В группе B: 500 испытаний с вероятностью p_B

2. Рассчитайте:
   - k_A = число успехов в группе A
   - k_B = число успехов в группе B
   - $\hat{p}\_A = k\_A/500$
   - $\hat{p}\_B = k\_B/500$

3. Объединенная доля:

   $\hat{p} = (k\_A + k\_B) / 1000$

4. Статистика:

   z = ($\hat{p}$_B - $\hat{p}$_A) / КОРЕНЬ($\hat{p}$*(1-$\hat{p}$)*(1/500 + 1/500))

5. p-value и вывод.

4.4. Расчет мощности

Предположим, реальная конверсия B = p_B_real (из таблицы).

1. Критическое значение для правостороннего теста:

z_крит = НОРМ.СТ.ОБР(1-α)

2. Критическая доля:

p_крит = p_A + z_крит * √(p_A(1-p_A)/n)

3. Мощность:

мощность = 1 - НОРМ.СТ.РАСП((p_крит - p_B_real) / √(p_B_real(1-p_B_real)/n); ИСТИНА)

4.5. Определение размера выборки

Для желаемой мощности 80% (β=0.2) и α=0.05:

$n = (z_{0.975} + z_{0.8})^2 * (p_A(1-p_A) + p_B(1-p_B)) / (p_B - p_A)^2$

В Excel:

= (НОРМ.СТ.ОБР(0.975) + НОРМ.СТ.ОБР(0.8))^2 * (0.04*0.96 + 0.055*0.945) / (0.055-0.04)^2

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

Лабораторная работа №6

Проверка статистических гипотез. A/B тестирование

```
N := 3
p_A := 0.04
p_B_obs := 0.04 + 0.005·N   // p_B_obs = 0.055
p_B_real := 0.04 + 0.008·N  // p_B_real = 0.064
n := 500
α := 0.05

// Наблюдаемая статистика
p̂_B := p_B_obs
z_obs := (p̂_B - p_A) / √(p_A·(1 - p_A)/n)

// p-value (правосторонний)
p_value := 1 - pnorm(z_obs, 0, 1)

// Критическое значение
z_crit := qnorm(1 - α, 0, 1)
```

```
// Мощность
p_crit := p_A + z_crit·√(p_A·(1 - p_A)/n)
power := 1 - pnorm(p_crit, p_B_real, √(p_B_real·(1 - p_B_real)/n))

// Необходимый размер выборки
z_α := qnorm(1 - α, 0, 1)
z_β := qnorm(0.8, 0, 1)  // для мощности 80%
n_req := (z_α + z_β)^2 · (p_A·(1-p_A) + p_B_real·(1-p_B_real)) / (p_B_real - p_A)^2
```

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что показывает p-value в вашем тесте?
2. Какая мощность у вашего критерия? Достаточна ли она?
3. Как изменится мощность, если увеличить уровень значимости α?
4. Почему для планирования A/B теста нужно определять размер выборки заранее?
5. Что такое ошибки I и II рода? Какая из них опаснее в бизнесе?
6. Какой минимальный размер выборки нужен, чтобы обнаружить эффект 1% с мощностью 80%?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

«КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Научиться анализировать взаимосвязи между переменными, строить и интерпретировать регрессионные модели, проверять их адекватность, делать прогнозы.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Коэффициент корреляции Пирсона

Мера линейной связи между двумя переменными:

$$r = \mathrm{cov}(X,Y) / (\sigma_X \cdot \sigma_Y)$$

Свойства:
- $-1 \leq r \leq 1$
- $r = 0$ — нет линейной связи
- $|r| = 1$ — линейная функциональная зависимость
- r^2 — доля объясненной дисперсии

Интерпретация:
- $|r| < 0.3$ — слабая корреляция
- $0.3 \leq |r| < 0.7$ — умеренная корреляция
- $|r| \geq 0.7$ — сильная корреляция

2.2. Простая линейная регрессия

Модель: $Y = a + b\cdot X + \varepsilon$

Оценки метода наименьших квадратов (МНК):

$$b = \mathrm{cov}(X,Y) / D(X) = r \cdot \sigma_Y / \sigma_X$$
$$a = \bar{Y} - b\cdot\bar{X}$$

Коэффициент детерминации R^2:

$$R^2 = r^2 = 1 - (\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2) / (\sum(Y_i - \bar{Y})^2)$$

2.3. Проверка значимости

Для коэффициента b:
- H_0: $b = 0$
- t-статистика: $t = b / SE(b)$ с n-2 степенями свободы

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
a (свободный	100+5·N	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150

член)											
b (наклон)	20+2·N	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
σ_ε (шум)	10+N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r (целевой)	0.1·N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
n (наблюдений)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР7.xlsx

2. Создайте лист «Параметры» с вашими значениями.

4.2. Генерация коррелированных данных

1. Создайте лист «Данные»

2. Сгенерируйте X (равномерно от 1 до 10):

   =1 + 9*СЛЧИС()

3. Сгенерируйте Y по модели: Y = a + b·X + ε, где ε ~ N(0, σ_ε²)

   =Параметры!$B$2 + Параметры!$B$3 * A4 + НОРМ.ИНВ(СЛЧИС(); 0; Параметры!$B$4)

4. Скопируйте формулы на 30 строк.

4.3. Корреляционный анализ

1. Рассчитайте коэффициент корреляции:

   =КОРРЕЛ(A4:A33; B4:B33)

2. Проверьте значимость корреляции:
   - t-статистика: =C4 * КОРЕНЬ(28) / КОРЕНЬ(1 - C4^2)
   - p-value: =СТЬЮДЕНТ.РАСП.2Х(ABS(D4); 28)
   - Вывод: если p-value < 0.05, корреляция значима

3. Постройте диаграмму рассеяния:
   - Выделите A4:B33
   - Вставка → Точечная диаграмма

4.4. Регрессионный анализ

Способ 1: Использование встроенных функций

1. Коэффициент наклона b:

=НАКЛОН(B4:B33; A4:A33)

2. Свободный член a:

=ОТРЕЗОК(B4:B33; A4:A33)

3. R^2:

=КВПИРСОН(B4:B33; A4:A33)

Способ 2: Пакет анализа

1. Данные → Анализ данных → Регрессия
2. Входной интервал Y: B4:B33
3. Входной интервал X: A4:A33
4. Отметить: Остатки, График остатков
5. Нажмите ОК

4.5. Анализ остатков

1. Рассчитайте предсказанные значения:

=F4 + F5 * A4

2. Рассчитайте остатки:

=B4 - G4

3. Постройте график остатков от X. Остатки должны быть случайным облаком без тренда.

4. Постройте гистограмму остатков — должна быть похожа на нормальное распределение.

4.6. Прогнозирование

1. Для $X_0 = 7$ рассчитайте точечный прогноз:

=F4 + F5 * 7

2. Рассчитайте стандартную ошибку прогноза (сложная формула) или используйте вывод регрессии.

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

Лабораторная работа №7

Корреляционный и регрессионный анализ

N := 3
a_true := 100 + 5·N   // a_true = 115
b_true := 20 + 2·N   // b_true = 26
σ_ε := 10 + N   // σ_ε = 13

```
n := 30

// Генерация данных
i := 0 .. n-1
X_i := rnd(9) + 1       // равномерно от 1 до 10
ε_i := rnorm(1, 0, σ_ε)
Y_i := a_true + b_true·X_i + ε_i

// Корреляция
r := corr(X, Y)

// Регрессия методом наименьших квадратов
b := corr(X, Y)·stdev(Y)/stdev(X)
a := mean(Y) - b·mean(X)

// Предсказанные значения и остатки
Ŷ_i := a + b·X_i
e_i := Y_i - Ŷ_i

// R²
R2 := r^2

// Стандартная ошибка регрессии
S_e := √(∑(e_i^2)/(n - 2))

// Стандартная ошибка коэффициента b
SE_b := S_e / √(∑(X_i - mean(X))^2)

// t-статистика для b
t_b := b / SE_b
p_value := 2·(1 - pCDF(t, n-2, t_b))  // двусторонний тест
```

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Насколько оцененная регрессия близка к истинной в вашем случае?
2. Значим ли коэффициент наклона (по p-value)? Что это значит?
3. Какую долю дисперсии Y объясняет X (R^2)?
4. Выполняются ли предположения регрессии (по остаткам)?
5. Какой прогноз для X=7? Какова его точность?
6. Что произойдет с R^2, если убрать шум ($\sigma_\varepsilon = 0$)?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

«Цепи Маркова. Моделирование поведения пользователей»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить моделирование цепей Маркова, научиться анализировать стационарные распределения, применять для моделирования поведения пользователей.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Цепь Маркова

Последовательность случайных величин, где будущее зависит только от настоящего, но не от прошлого:

$P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) = P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i)$

2.2. Матрица переходных вероятностей

Для цепи с m состояниями матрица P размера m×m, где:

P_{ij} = P(переход из i в j за один шаг)

Свойства:

- Все элементы ≥ 0
- Сумма элементов в каждой строке = 1

2.3. Распределение через k шагов

Если p(0) — начальное распределение (вектор-строка), то:

$p(1) = p(0) \cdot P$
$p(2) = p(1) \cdot P = p(0) \cdot P^2$
$p(k) = p(0) \cdot P^k$

2.4. Стационарное распределение

Вектор π, удовлетворяющий условию:

$\pi = \pi \cdot P, \quad \pi_i \geq 0, \quad \sum \pi_i = 1$

Стационарное распределение — долгосрочные доли времени в каждом состоянии, не зависит от начального распределения (для эргодических цепей).

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Каждому студенту присваивается номер N от 1 до 10. Матрица переходов строится по правилу:

Для $i \neq j$: $P_{ij} = 0.05 \cdot N$

Для i = j: P_{ii} = 1 - сумма остальных в строке

Пример для N=3:

	Сост.1	Сост.2	Сост.3
Сост.1	0.85	0.15	0.00
Сост.2	0.15	0.70	0.15
Сост.3	0.00	0.15	0.85

Начальное распределение: p(0) = (0.5, 0.3, 0.2)

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР8.xlsx

2. Создайте лист «Параметры»:

A	B
N	(ваш номер)
p_{ij} (i≠j)	=0.05*B1

4.2. Построение матрицы переходов

1. Создайте лист «Матрица P»

2. Введите матрицу 3×3:

	A	B	C	
1		Сост.1	Сост.2	Сост.3
2	Сост.1	=1-2*Параметры!$B$2	=Параметры!$B$2	0
3	Сост.2	=Параметры!$B$2	=1-2*Параметры!$B$2	=Параметры!$B$2
4	Сост.3	0	=Параметры!$B$2	=1-2*Параметры!$B$2

3. Проверьте: суммы по строкам должны быть равны 1.

4.3. Начальное распределение

В ячейки B6:D6 введите:

B6: 0.5
C6: 0.3
D6: 0.2

4.4. Распределение через 1 шаг

1. Выделите ячейки B8:D8

2. Введите формулу массива:

=МУМНОЖ(B6:D6; B2:D4)

3. Нажмите Ctrl+Shift+Enter

4.5. Распределение через 2 шага

1. Выделите ячейки B9:D9
2. Введите: =МУМНОЖ(B8:D8; B2:D4)
3. Ctrl+Shift+Enter

4.6. Распределение через 4, 8, 16 шагов

Продолжайте умножать. Заметим, что после 8-10 шагов распределение стабилизируется.
4.7. Стационарное распределение (метод итераций)

Продолжайте умножать, пока изменения не станут меньше 0.0001.

4.8. Стационарное распределение (метод решения уравнений)

Решите систему: $\pi \cdot P = \pi$, $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

В Excel используйте «Поиск решения»:
- Целевая ячейка: любая π_i (например, G1)
- Ограничения:
  - $G1*P_{11} + G2*P_{21} + G3*P_{31} = G1$
  - $G1*P_{12} + G2*P_{22} + G3*P_{32} = G2$
  - $G1*P_{13} + G2*P_{23} + G3*P_{33} = G3$
  - G1 + G2 + G3 = 1
  - G1, G2, G3 ≥ 0

4.9. Моделирование траектории

1. Создайте лист «Траектория»

2. В A1: начальное состояние (1)

3. Для каждого следующего шага используйте функцию ВПР для выбора следующего состояния на основе случайного числа.

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

Лабораторная работа №8

Цепи Маркова

N := 3
q := 0.05·N   // q = 0.15

// Матрица переходов

P :=

1 - 2·q	q	0
q	1 - 2·q	q
0	q	1 - 2·q

// Начальное распределение
p0 := (0.5 0.3 0.2)

// Распределение через k шагов
p1 := p0·P
p2 := p1·P
p4 := p2·P^2
p8 := p4·P^4

// Стационарное распределение (собственный вектор)
π := eigenvec(P^T, 1)
π := π / ∑(π)   // нормировка

// Проверка: π·P должно равняться π
πP := π·P

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как зависит скорость сходимости к стационарному распределению от диагональных элементов матрицы?
2. Почему стационарное распределение не зависит от начального?
3. Как можно использовать эту модель для бизнес-решений (например, удержание клиентов)?
4. Какие предположения модели могут нарушаться в реальности?
5. Что произойдет, если сделать один из переходов нулевым?
6. Как найти среднее время возврата в состояние?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

«Метод Монте-Карло. Оценка финансовых рисков»

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить метод Монте-Карло для решения вероятностных задач, научиться оценивать финансовые риски, рассчитывать Value at Risk (VaR).

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Метод Монте-Карло

Статистическое моделирование для оценки математических ожиданий и вероятностей:

$E[g(\xi)] \approx (1/M) \cdot \sum g(\xi_i)$

где ξ_i — независимые реализации случайной величины.

2.2. Модель цены актива (логнормальная)

$S\_T = S_0 \cdot \exp((\mu - \sigma^2/2) \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot Z)$

где:
- S_0 — начальная цена
- μ — ожидаемая доходность
- σ — волатильность
- T — горизонт
- $Z \sim N(0,1)$

2.3. Оценка опциона колл

Опцион колл дает право купить актив по цене K в будущем. Выплата в момент T:

payoff = max(S_T - K, 0)

Цена опциона (дисконтированная ожидаемая выплата):

C = e^{-rT} · E[payoff]

2.4. Value at Risk (VaR)

VaR на уровне доверия q — это такой убыток, который не будет превышен с вероятностью q: P(убыток ≤ VaR) = q

Обычно используют q = 0.95 или q = 0.99.

Expected Shortfall (ES) — средний убыток при условии, что он превысил VaR.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Параметр	Формула	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
S_0	100+N	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
K	105+N	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
T (лет)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r (безриск.)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
σ (волатильность)	0.2+0.01·N	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30
M (симуляций)	1000·N	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Уровень VaR	0.95+0.005·N	0.955	0.96	0.965	0.97	0.975	0.98	0.985	0.99	0.995	1.0

4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В EXCEL

4.1. Подготовка файла

1. Создайте новый файл Excel и сохраните как: Фамилия_Имя_Группа_ПР9.xlsx

2. Создайте лист «Параметры» с вашими значениями.

4.2. Генерация сценариев цены акции

1. Создайте лист «Монте-Карло»

2. В столбце A создайте номера сценариев от 1 до M

3. В столбце B сгенерируйте стандартные нормальные величины:

=НОРМ.СТ.ОБР(СЛЧИС())

4. В столбце C рассчитайте цену акции в момент T:

=Параметры!$B$2 * EXP((Параметры!$B$5 - Параметры!$B$6^2/2)*Параметры!$B$4 + Параметры!$B$6*КОРЕНЬ(Параметры!$B$4)*B4)

4.3. Расчет выплат по опциону

1. В столбце D рассчитайте выплату:

=МАКС(C4 - Параметры!$B$3; 0)

2. Скопируйте формулы на все M строк.

4.4. Оценка цены опциона

1. Средняя выплата: =СРЗНАЧ(D4:D10003)

2. Цена опциона (дисконтированная):

=EXP(-Параметры!$B$5 * Параметры!$B$4) * E2

3. Стандартная ошибка оценки:

=СТАНДОТКЛОН.В(D4:D10003) / КОРЕНЬ(Параметры!$B$7)

4.5. Построение распределения выплат

1. Постройте гистограмму выплат (столбец D)

2. Большинство выплат = 0, небольшой хвост положительных значений

4.6. Расчет Value at Risk (VaR)

1. Скопируйте столбец выплат в новый столбец и отсортируйте по возрастанию

2. Найдите индекс для уровня доверия q:

индекс = ЦЕЛОЕ(Параметры!$B$8 * Параметры!$B$7)

3. VaR (как убыток):

= - НАИМЕНЬШИЙ(D4:D10003; индекс)

(знак минус, так как VaR обычно выражают положительным числом)

4.7. Расчет Expected Shortfall

Среднее значение выплат, которые хуже VaR:

= - СРЗНАЧ(НАИМЕНЬШИЙ(D4:D10003; СТРОКА(ДВССЫЛ("1:" & индекс))))

4.8. Анализ точности

1. Проведите 10 независимых симуляций с M/10 сценариями
2. Рассчитайте для каждой цену опциона
3. Найдите стандартное отклонение этих оценок
4. Сравните с теоретической стандартной ошибкой

5. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ В MATHCAD

Лабораторная работа №9

Метод Монте-Карло. Оценка финансовых рисков

```
N := 3
S0 := 100 + N       // S0 = 103
K := 105 + N        // K = 108
T := 1
r := 0.05
```

```
σ := 0.2 + 0.01·N    // σ = 0.23
M := 1000·N          // M = 3000
q := 0.95 + 0.005·N  // q = 0.965

// Генерация сценариев
i := 0 .. M-1
Z_i := rnorm(1, 0, 1)
S_T_i := S0·exp((r - σ^2/2)·T + σ·√T·Z_i)

// Выплаты по опциону
payoff_i := max(S_T_i - K, 0)

// Оценка цены опциона
C_MC := exp(-r·T)·mean(payoff)

// Стандартная ошибка
SE := stdev(payoff)/√M

// VaR
упор_payoff := sort(payoff)
idx := floor((1 - q)·M)
VaR := -упор_payoff_idx

// Expected Shortfall
ES := -mean(упор_payoff[0..idx])

// Теоретическая цена по формуле Блэка-Шоулза
d1 := (ln(S0/K) + (r + σ^2/2)·T) / (σ·√T)
d2 := d1 - σ·√T
C_BS := S0·pnorm(d1, 0, 1) - K·exp(-r·T)·pnorm(d2, 0, 1)
```

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова точность оценки цены опциона в вашем случае?
2. Как интерпретировать VaR 95% = X рублей?
3. Почему Expected Shortfall лучше VaR для оценки экстремальных рисков?
4. Как можно увеличить точность метода Монте-Карло без увеличения M?
5. Как изменится VaR при увеличении волатильности σ?
6. Сколько сценариев нужно для оценки цены опциона с точностью ±0.01?

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ШПАРГАЛКА ПО EXCEL

Задача	Функция	Пример
Генерация равномерного	=СЛЧИС()*(b-a)+a	=СЛЧИС()*20+5
Генерация нормального	=НОРМ.ОБР(СЛЧИС();μ;σ)	=НОРМ.ОБР(СЛЧИС();50;10)
Генерация Бернулли	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<p;1;0)	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<0.3;1;0)
Среднее	=СРЗНАЧ(диапазон)	=СРЗНАЧ(A1:A100)
Дисперсия (выборочная)	=ДИСП.В(диапазон)	=ДИСП.В(A1:A100)
Стандартное отклонение	=СТАНДОТКЛОН.В(диапазон)	=СТАНДОТКЛОН.В(A1:A100)
Медиана	=МЕДИАНА(диапазон)	=МЕДИАНА(A1:A100)

Квантиль нормальный	=НОРМ.ОБР(p;μ;σ)	=НОРМ.ОБР(0.95;0;1)
Плотность нормальная	=НОРМ.РАСП(x;μ;σ;ЛОЖЬ)	=НОРМ.РАСП(50;50;10;ЛОЖЬ)
Биномиальная вероятность	=БИНОМ.РАСП(k;n;p;ЛОЖЬ)	=БИНОМ.РАСП(5;10;0.3;ЛОЖЬ)
Пуассоновская вероятность	=ПУАССОН.РАСП(k;λ;ЛОЖЬ)	=ПУАССОН.РАСП(3;2.5;ЛОЖЬ)
Корреляция	=КОРРЕЛ(диапазон1;диапазон2)	=КОРРЕЛ(A1:A20;B1:B20)
Наклон регрессии	=НАКЛОН(Y;X)	=НАКЛОН(B1:B20;A1:A20)
Отрезок регрессии	=ОТРЕЗОК(Y;X)	=ОТРЕЗОК(B1:B20;A1:A20)
R^2	=КВПИРСОН(Y;X)	=КВПИРСОН(B1:B20;A1:A20)
t-квантиль	=СТЬЮДЕНТ.ОБР(1-α/2;df)	=СТЬЮДЕНТ.ОБР(0.975;30)
Умножение матриц	=МУМНОЖ(матрица1;матрица2)	=МУМНОЖ(A1:C3;E1:G3)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ШПАРГАЛКА ПО MATHCAD

Задача	Функция	Пример
Плотность нормальная	dnorm(x, μ, σ)	dnorm(50, 50, 10)
Функция нормальная	pnorm(x, μ, σ)	pnorm(60, 50, 10)
Квантиль нормальный	qnorm(p, μ, σ)	qnorm(0.95, 0, 1)
Генерация нормальных	rnorm(M, μ, σ)	rnorm(100, 0, 1)
Плотность биномиальная	dbinom(k, n, p)	dbinom(5, 10, 0.3)
Плотность пуассоновская	dpois(k, λ)	dpois(3, 2.5)
Плотность показательная	dexp(x, λ)	dexp(2, 0.5)
Среднее	mean(вектор)	mean(X)
Дисперсия	var(вектор)	var(X)
Стандартное отклонение	stdev(вектор)	stdev(X)
Медиана	median(вектор)	median(X)
Корреляция	corr(вектор1, вектор2)	corr(X, Y)
Собственные векторы	eigenvec(M, λ)	eigenvec(P^T, 1)
Сортировка	sort(вектор)	sort(X)
Кусочная функция	if(условие, знач1, знач2)	if(x<0, 0, 1)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2023. – 479 с.
2. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2023. – 406 с.
3. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей: учебник для вузов. – 12-е изд. – М.: Кнорус, 2022. – 664 с.
4. **Лагутин М.Б.** Наглядная математическая статистика в Excel. – 4-е изд. – М.: Бином, 2022. – 472 с.
5. **Охорзин В.А.** Прикладная математика в системе Mathcad. – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2022. – 352 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

6. **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – 4-е изд. – М.: Юнити-Дана, 2021. – 551 с.
7. **Половко А.М., Гуров С.В.** Основы теории надежности. – 4-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2021. – 704 с.
8. **Ширяев А.Н.** Основы стохастической финансовой математики. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2021. – 1024 с.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. – 4-е изд. – М.: Либроком, 2021. – 1056 с.
10. **Уокенбах Дж.** Excel 2019. Библия пользователя. – М.: Вильямс, 2021. – 1152 с.