МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФИЛИАЛ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. НИЖНЕВАРТОВСКЕ

Кафедра «Гуманитарные, естественнонаучные и технические дисциплины»

В.В. Коледин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для обучающихся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Программная инженерия», «Приборостроение» всех форм обучения

НИЖНЕВАРТОВСК
2023

ББК 22.19
К 60

Одобрено
редакционно-издательским советом филиала

Рецензенты:
к.п.н., доцент кафедры "Гуманитарно-экономические и естественнонаучные дисциплины" филиала Тюменского государственного университета в г. Нижневартовске Зверева Е.А.

Коледин В.В.

Вычислительная математика: учебное пособие для обучающихся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Программная инженерия», «Приборостроение» всех форм обучения / В.В. Коледин. – Нижневартовск, 2023. – 100 с.

В пособии рассмотрены численные методы решения нелинейных уравнений; представлены точные и приближенные методы решения систем алгебраических уравнений. В главах 4 и 5 представлены методы интерполяции и аппроксимации функций. Главы 6 и 7 содержат сведения о приближенных вычислениях интегралов и дифференциальных уравнениях. В каждой главе имеются вопросы для самоконтроля и множество примеров решения задач на ПК при помощи универсальной математической системы MathCAD. Каждая глава содержит лабораторную работу и 30 вариантов заданий к ней; приведены примеры, иллюстрирующие выполнение лабораторной работы.

Учебное пособие соответствуют требованиям ФГОС ВО по всем представленным направлениям подготовки: Информатика и вычислительная техника, Программная инженерия, Приборостроение.

Представленное методическое пособие предназначено для изучения теоретического материала и выполнения лабораторных работ, способствующих формированию профессиональных компетенций, необходимых для дальнейшей профессиональной деятельности обучающихся. Пособие может быть полезно при изучении и преподавании дисциплин математического и естественнонаучного циклов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика — это наука о методах решения вычислительных задач на компьютере. Она появилась от необходимости решать практические задачи, такие, как управление сложными технологическими процессами, управление полётом ракет, моделирование физических процессов (процесса ядерного распада, химических реакций, роста кристаллов и др.).

Задачами вычислительной математики занимались такие выдающиеся учёные, как Эйлер, Лагранж, Чебышёв, Якоби, Лежандр, фон Нейман и многие другие. Они, часто занимаясь сложными вычислениями вручную на бумаге, невольно заложили основы науки об эффективных безошибочных вычислениях на компьютерах. Всем известно, что компьютеры имеют дело с числами с ограниченным количеством знаков после запятой. Однако именно эти «мелочи» могут сильно исказить результаты численных расчётов. Появился важнейший раздел вычислительной математики — теория устойчивости вычислительных методов.

Данное учебное пособие написано в соответствие с действующими ФГОС ВО. Стандарты предыдущих поколений прописывали конкретные разделы дисциплины «Вычислительная математика», знаниями которых должны обладать будущие выпускники:

- особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ;
- теоретические основы численных методов: погрешности вычислений;
- устойчивость и сложность алгоритма (по памяти по времени);
- численные методы линейной алгебры;
- решение нелинейных уравнений и систем;
- численное интегрирование и дифференцирование;
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
- методы приближения и аппроксимации функций;
- равномерное приближение функций;
- математические программные системы.

Современные ФГОС ВО предусматривают проектирование компетентно-ориентированных рабочих программ дисциплин, входящих в учебный план.

Пособие содержит необходимые теоретические сведения, примеры, иллюстрирующие применение того или иного вычислительного метода, пример выполнения задания в среде универсальной математической системы MathCAD, задания для самостоятельного решения. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по техническим, экономическим и другим направлениям, в составе основных образовательных программ которых формируются указанные компетентности, может быть полезно аспирантам и преподавателям.

Каждая глава пособия содержит варианты заданий для лабораторной работы, а также перечень вопросов для защиты выполненной работы. Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1 Источники погрешностей и приближений

Процесс решения задачи с использованием вычислительной техники проходит целый ряд этапов: построение математической модели, разработка или выбор численного метода, разработка алгоритма, программирование, проведение вычислений. Некоторые из этих этапов могут являться источником погрешностей и оказывать тем самым свое влияние на достоверность (точность) окончательного результата. Рассмотрим основные источники погрешностей:

- исходные данные задачи, полученные экспериментально или в ходе расчетов, часто являются основным источником погрешностей;

- используемая при решении задачи математическая модель также вносит погрешность в получаемый результат в виду того, что она является лишь приближенным описанием реального процесса или явления;

- погрешности исходных данных и погрешность математической модели относятся к виду *неустранимых погрешностей* в том смысле, что в ходе последующих вычислений их нельзя устранить.

Если для решения математической задачи используется приближенный (например, численный) метод, то, еще не приступив к вычислениям, мы допускаем новую погрешность, называемую *погрешностью метода*.

Погрешность численного метода теоретически может быть уменьшена до любого значения. Однако на практике ограничиваются тем, чтобы довести погрешность метода до величины, в несколько раз меньшей неустранимой погрешности. Дальнейшее повышение точности метода не приведет к повышению точности окончательного результата, а лишь увеличит стоимость расчетов из-за увеличения объема вычислений.

При вычислениях с помощью компьютера неизбежны *погрешности округлений*, связанные с ограниченностью разрядной сетки вычислительной машины. Несмотря на то, что при решении сложных задач выполняются миллиарды и триллионы операций, это вовсе не означает механического умножения погрешности при одном округлении на число операций, так как при отдельных действиях погрешности могут компенсировать друг друга. Вместе с тем иногда погрешности округлений в сочетании с плохо организованным алгоритмом могут сильно исказить результаты или даже привести к абсурдным результатам.

Погрешность является мерой точности результата. Для количественной характеристики этой меры используют понятия *абсолютной и относительной погрешностей.*

Определение. Пусть x – точное и неизвестное значение какой-либо величины, a – ее известное приближенное значение. Тогда абсолютную величину разности между соответствующим точным числом x и его приближенным значением называют абсолютной погрешностью приближенного числа

$$\Delta = |x - x^*|. \quad (1)$$

В качестве абсолютной погрешности результатов измерений часто принимают половину цены деления измерительного прибора или среднеквадратичное отклонение (при проведении серии измерений).

Определение. Предельной абсолютной погрешностью приближенной величины x^* называется величин

$$\Delta_{x^*} \geq |x - x^*|. \quad (2)$$

(не меньшая абсолютной погрешности этого числа).

Предельную абсолютную погрешность часто называют просто абсолютной погрешностью. Иногда записывают $x = x^* + \Delta_{x^*}$.

Например, запись x = 2,123 ± 0,003 или x = 2,123 ± 3*10^{-3} означает, что $2{,}123 - 0{,}003 \leq x \leq 2{,}123 + 0{,}003$

Определение. Предельной относительной погрешностью или просто относительной погрешностью δ приближенной величины x^* называют отношение предельной абсолютной погрешности Δ_{x^*} к приближенной величине x^*:

$$\delta = \left|\frac{\Delta_{x^*}}{x^*}\right|. \quad (3)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

1.2 Приближенные числа

При работе с приближенными числами используют понятия *значащих и верных значащих цифр.*

<u>Определение.</u> Значащими цифрами приближенного числа x^* называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Например, 0.00<u>1234</u> – четыре значащие цифры, <u>1.2345</u>- пять значащих цифр, <u>4.00567</u> - шесть значащих цифр. (Все значащие цифры подчеркнуты).

<u>Определение.</u> Значащая цифра приближенного числа x^* называется *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, в котором находится это число. Значащие цифры разрядов, где не выполняется это условие, называются *сомнительными*.

Пример. Пусть для приближенного числа x^* = 72,356 известна абсолютная погрешность Δ_{x^*} = 0,04. Требуется определить его верные значащие цифры.

Проверим цифру 7. Половина единицы ее разряда $\frac{10}{2} = 5 \geq 0{,}04$. Значит, она верная. Для цифры 2: $\frac{1}{2} = 0{,}5 \geq 0{,}04$. тоже верная. Верной будет и цифра 3: $\frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 \geq 0{,}04$; для цифры 5 имеем: $\frac{0{,}01}{2} = 0{,}005 < 0{,}04$ сомнительная цифра и т.д.

Количество верных значащих цифр тесно связано с величиной относительной погрешности числа. В частности, если приближенное число x^* содержит N верных значащих цифр, то для относительной погрешности имеет место соотношение $\delta \approx 10^{-N}$. Это позволяет легко оценивать точность приближенного значения. Так, например, если дано число x^* = 2,345 и сказано, что в его записи оставлены только верные цифры, то относительная погрешность этого числа $\delta \approx 10^{-4}$.

При изменении формы записи приближенных чисел (например, при записи в форме с плавающей точкой) *количество значащих цифр не должно меняться*, т.е. нужно соблюдать равносильность преобразований. Например, запись 71,0 = 0,710 * 10^{-4} равносильна, а запись 71 = 0,710 * 10^{-4}.

Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащие цифры. При округлении погрешностей округление всегда производится в большую сторону.

Информацию о том, что число x^* является приближенным значением числа x с абсолютной погрешностью Δ_{x^*} часто записывают в виде

$$x = x^* + \Delta_{x^*},$$

причем числа x^* и Δ_{x^*} принято записывать с одинаковым числом знаков после запятой.

Например, если в ходе вычислений, которые выполнялись с сохранением восьми десятичных знаков, было получено приближенное число x^* = 12,4687 и известно при этом, что абсолютная погрешность этого числа $\Delta_{x^*} = 0{,}02$, то результат вычислений следует записать в виде x ≈ 12,46 ± ,0 02 или $x \approx 12{,}46 \pm 2 * 10^{-2}$.

Если же в результате измерений (или вычислений) получено число $x^* =$ 10428 с абсолютной погрешностью $\Delta_{x^*} = 23$, то этот результат следует записать в виде $x \approx (104{,}2 \pm 0{,}3) * 10^2$

Информацию о том, что число x^* является приближенным значением числа x с относительной погрешностью δ записывают в виде $x \approx x^* (1 \pm \delta)$.

Например, записи $x \approx 123(1 \pm 0{,}003)$ или $x \approx 123(1 \pm 0{,}3\%)$ означают, что $(1 - 0{,}003) \cdot 1{,}123 \leq x \leq (1 - 0{,}003) \cdot 1{,}123$.

1.3 Прямая задача теории погрешностей

При вычислениях с приближенными числами важной задачей является *оценка степени влияния погрешностей исходных данных на точность окончательного результата*. Это необходимо не только для правильного учета вычислительных погрешностей, но также для определения возможных путей их уменьшения.

В частности, при вычислении значений функций, аргументами которых являются приближенные числа, возникает вопрос о погрешности вычисляемых значений. Определение величины погрешности результата по известным погрешностям исходных данных составляет *прямую задачу теории погрешностей*.

Пусть $y = f(x)$ – функция одного неизвестного. Аргумент функции задан приближенным числом x^* с абсолютной погрешностью Δ_{x^*} . Абсолютная погрешность значения функции согласно (2) $\Delta_{x^*} \geq |x - x^*|$ определяется так:

$$\Delta_{y^*} \geq |y - y^*|.$$

Рассматривая разность точного (неизвестного) и приближенного значений функции как приращение функции, вызванное приращением аргумента Δ_{x^*} , и применяя *теорему Лагранжа о замене приращения функции ее дифференциалом*, можно получить следующее выражение для Δ_{y^*}:

$$\Delta_{y^*} = \Delta_x * |f'(x^*)|. \tag{4}$$

При условии дифференцируемости функции $y = f(x)$.

Эта формула обобщается на случай функции многих переменных

$$y = f(x_1, x_4, \dots, x_n) \colon \Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i} \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_4, \dots, x_n) \right|. \tag{5}$$

Примеры.

1. $y = \ln x$, $\Delta_{y^*} = \Delta_{x^*} \left| \frac{1}{x} \right|$

2. $z(x, y) = 2x^3 + x \sin y$, $\Delta_{z^*} = \Delta_{x^*} \left| 6x^2 + \sin y \right| + \Delta_{y^*} \left| x \cos y \right|$

Используя формулу (1) можно легко получить формулы для определения абсолютных и относительных погрешностей результатов арифметических операций. Так, например, для суммы или разности двух слагаемых a и b можно записать функцию двух переменных $f(a, b) = a \pm b$, абсолютная погрешность которой согласно (5) определяется как

$$\Delta(\alpha^* \pm b^*) = \Delta_{\alpha^*}|f_a'| \pm \Delta_{b^*}|f_b'| = \Delta_{a^*} \pm \Delta_{b^*}. \tag{6}$$

Замечание. При сложении большого количества слагаемых, погрешность суммы, вычисленная по формуле (2), оказывается сильно завышенной. В этом случае часто применяют статистическую оценку погрешности суммы:

$\Delta S^* = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}$, где n – число слагаемых в сумме $S^* = a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*$, а m – номер десятичного разряда, до которого округляется результат. Эту формулу используют при $n > 10$.

Относительная погрешность суммы и разности двух чисел будет определяться выражением

$$\delta(a^* \pm b^*) = \frac{\Delta l a^* + b^x y}{|a^* \pm b^*|} = \frac{\Delta_{a^*} \pm \Delta_{b^*}}{|a^* \pm b^*|}. \tag{7}$$

Из рассмотренных формул следует, что при сложении или вычитании приближенных чисел желательно, чтобы эти числа обладали одинаковыми абсолютными погрешностями, т.е. одинаковым числом разрядов после десятичной точки. Так, как учет большего числа десятичных разрядов в одном числе при меньшем в другом не приводит к повышению точности результата.

Для абсолютных и относительных погрешностей произведения и частного получим из (5) следующие результаты:

$$\Delta(\alpha^* \pm b^*) = \Delta_{\alpha^*}|b^*| + \Delta_{b^*}|a^*|; \quad \delta(a^* \cdot b^*) = \delta_{a^*} + \delta_{b^*}. \tag{8}$$

$$\Delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{\Delta_{a^*}|b^*| + \Delta_{b^*}|a^*|}{b^{*2}}; \quad \delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \delta_{a^*} + \delta_{b^*}. \tag{9}$$

Из этих формул следует, что при умножении и делении приближенных чисел, количество значащих цифр целесообразно выравнивать по наименьшему из них.

1.4 Обратная задача теории погрешностей

На практике часто бывает необходимо получить результат вычислений так, чтобы его погрешность не превосходила некоторого допустимого значения. При этом возникает задача определения допустимых (предельных) погрешностей исходных данных задачи, при которых погрешность результата не превысит заданного значения. Эта задача носит название *обратной задачи теории погрешностей*. Для функции одной переменной допустимая погрешность аргумента определяется согласно (4) выражением:

$$\Delta x = \frac{\Delta y^*}{|f'(x^*)|}. \tag{10}$$

Для функции нескольких переменных эта задача решается при введении дополнительного предположения – так называемого *принципа равных влияний.*

При этом полагают, что в формуле (5) все слагаемые $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i$ равны между собой, тогда

$$\Delta x_i^* = \frac{\Delta y^*}{n \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \quad i = 1,2, \dots, n. \tag{11}$$

1.5 Особенности машинной арифметики

Причиной появления вычислительных погрешностей является способ представления чисел в компьютере. Современные компьютеры позволяют обрабатывать *целые* и *вещественные* числа. По форме представления, способу хранения и реализации вычислительных операций в процессоре целые и вещественные числа существенно различаются.

Как известно, множество целых чисел бесконечно. Однако процессор в силу ограниченности его *разрядной сетки* может оперировать лишь с некоторым конечным подмножеством этого множества. В современных компьютерах для хранения целого числа обычно отводится 4 байта памяти, что позволяет представить целые числа, находящиеся примерно в диапазоне от $-2\cdot 10^9$ до $2\cdot 10^9$.

При решении научных и инженерных задач в основном используются вещественные числа. В памяти компьютера они представлены в форме с *плавающей точкой* (*floating point*). Десятичное число D в этой форме записи имеет вид, $D = \pm m \cdot 10^n$, где m и n – соответственно *мантисса* числа и его *порядок*.

Например, число 357.5 можно записать в виде: $3575\cdot 10^{-1}$, $0.3575\cdot 10^3$.

Последняя запись – *нормализованная форма* числа с плавающей точкой. Обычная же запись числа в виде 357.5 называется формой записи с фиксированной точкой.

Такое представление чисел в компьютерах используется только на этапах их ввода или вывода, в то время как хранение и обработка вещественных чисел осуществляется именно в форме с плавающей точкой.

Все сказанное выше в равной степени относится к любой системе счисления с произвольным основанием.

В силу ограниченности разрядной сетки процессора количество разрядов мантиссы k не может быть сколь угодно большим, величина порядка n также ограничена и находится в пределах от n_1 до n_2. Это приводит к тому, что множество вещественных чисел, с которым работает компьютер не является бесконечным.

Можно показать, что при заданных k, n_1 и n_2 это множество содержит $N = 2(n_2 - n_1 + 1)z^{k-1} + 1$ чисел. При этом минимальное и максимальное по модулю из этих чисел имеют значения $M_0 = 2^{n_1 - 1} \dots M_\infty = (1 - 2^{-k})2^{n_2}$ и называются, соответственно, *машинным нулем* и *машинной бесконечностью*.

Границы порядка n_1 и n_2 определяют ограниченность вещественных чисел по величине, а разрядность k – дискретность распределения их на отрезке числовой оси.

Конечное количество разрядов мантиссы приводит к тому, что при вычислениях с помощью компьютера неизбежны погрешности округления. Так, например, если при 6 десятичных разрядах к числу 0.214724 прибавить число, меньшее по модулю половины последнего разряда (т.е. меньшее по модулю 0.0000005), в результате получится то же самое число 0.214724.

Величина ошибки округления определяется количеством разрядов мантиссы. При округлении по дополнению (которое, как правило, и реализуется в компьютерах) максимальная относительная погрешность округления равна $\varepsilon_{max} = 0{,}5 \cdot 2^{1-k}$.

Величина ε_{max} называется *машинной точностью* или *машинным* ε. Для чисел, представленных в форматах с одинарной (k=24) и двойной (k=53)

Пример. Пусть требуется найти сумму пяти четырехразрядных чисел:

S = 0.2764+0.3944+1.475+26.46+1364. Складывая все эти числа, а затем, округляя результат до четырех значащих цифр, получаем. S = 1393.

Однако при вычислениях на компьютере округление происходит после каждой операции сложения. Предполагая условно сетку четырех разрядной (k=4), проследим за вычислениями на компьютере суммы чисел в порядке их записи: 0.2764+0.3944=0.6708, 0.6708+1.475=2.156, 2.156+26.46=28.62; 28.62+1364=1393. Получили S1= 1393, т.е. верный результат.

Изменим теперь порядок вычислений и начнем складывать числа последовательно от последнего к первому: 1393+26.46=1390, 1390+1.475=1391, 1391+0.3944=1391, 1391+0.2764=1391. Здесь окончательный результат S2= 1391, он менее точный.

Анализ процесса вычислений показывает, что потеря точности здесь происходит из-за того, что прибавления к большому числу малых чисел не происходит, поскольку они выходят за рамки разрядной сетки. Таких малых чисел может быть очень много, но на результат они все равно не повлияют, поскольку прибавляются по одному, что и имело место при вычислении S_2.

Здесь необходимо придерживаться правила, в соответствии с которым сложение чисел следует проводить по мере их возрастания. 17 Таким образом, в машинной арифметике из-за погрешностей округлений существенен порядок выполнения операций.

Как узнать, насколько адекватные результаты даёт компьютерная модель, которую вы построили, или, как принято говорить у вычислительных математиков, имеется ли сходимость решения модели к решению исходной задачи?

В вычислительной практике большое значение имеет чувствительность решения к малым изменениям входных данных. Задача называется плохо обусловленной, если малые изменения входных данных приводят к заметным изменениям решения. Измерить эту обусловленность на практике очень просто. Нужно просто попробовать чуть-чуть поменять входные данные и посмотреть, как меняется результат. Иначе, нужно выяснить, с какой погрешностью заданы входные данные, и экспериментально проверить в каких пределах меняется результат при варьировании входных данных в пределах их погрешности. Примеры плохо обусловленных задач, выполненных в системе MathCAD представлены ниже.

Пример.

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 15.9 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2.108804608539616194 6 \\ 1.8849356568081153331 \\ 0.0031298673261342361732 - 2.0000073624168891 36i \\ 0.0031298673261342361732 + 2.0000073624168891 36i \end{pmatrix}$$

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 15.9999999 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2.0001118002740060042 \\ 1.9998881934759939 86 \\ 3.1250000488281248 47e^{-9} + 2.00000000000000000073i \\ 3.1250000488281248 47e^{-9} - 2.00000000000000000073i \end{pmatrix}$$

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2i \\ -2i \end{pmatrix}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы основные источники погрешностей?
2. Что называется верной цифрой числа?
3. Как по записи приближенного числа оценить его абсолютную и относительную погрешности?
4. Как правильно записывать результат приближенных вычислений или измерений?
5. Что составляет прямую и обратную задачи теории погрешностей?
6. Как определяется погрешность приближенного значения функции многих переменных?
7. Как получить формулы для определения погрешностей арифметических операций?
8. Каковы особенности вычисления сумм приближенных чисел с использованием компьютера?
9. Какие задачи называют плохо обусловленными?
10. Как на практике определить плохую обусловленность задачи?

ГЛАВА 2 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Понятия и определения

Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, иррациональные, рациональные).

Определение. Уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_nx^0 = 0$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ некоторые числа называется алгебраическим. Число n называют степенью алгебраического уравнения.

Трансцендентными уравнениями называют уравнения, содержащие тригонометрические, логарифмические, показательные и другие функции.

Например, уравнение $2x^5 - x^3 + 4x = x - 6$ является алгебраическим, а уравнение $12\log_x(2-x)^5 = 0$ трансцендентным.

Определение. Корнем (решением) уравнения называется такое значение x, которое, будучи подставленным в исходное уравнение обращает его в тождество.

Как правило, нелинейное уравнения общего вида $f(\mathrm{x}) = 0$ невозможно решить аналитически. Для практических задач достаточно найти приближенное значение x, в определенном смысле близкое к точному решению уравнения $x_{\text{точн}}$.

В большинстве случаев поиск приближенного решения включает два этапа. На первом этапе отделяют корни, т. е. находят такие отрезки, внутри которых находится строго один корень. На втором этапе уточняют корень на одном из таких отрезков, т.е. находят его значение с требуемой точностью.

2.1.1. Локализация (отделение) корней уравнения

Отделение корней может производиться сочетанием графического и аналитического исследования функции.

Такое исследование опирается на теорему Вейерштрасса, в соответствии с которой для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(\mathrm{x})$ и любого числа y, отвечающего условию $f(a) \leq y \leq f(b),$ существует на этом отрезке точка x, в которой функция равна y.

Следовательно, для непрерывной функции достаточно найти отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки, и можно быть уверенным, что на этом отрезке есть корень уравнения $f(\mathrm{x}) = 0$.

Для ряда методов уточнения желательно, чтобы найденный на первом этапе отрезок содержал только один корень уравнения. Это условие выполняется, если функция на отрезке монотонна. Монотонность, можно проверить либо по графику функции, либо по знаку производной.

Пример: для функции $f(x) = 3\sin(2x) - 1{,}5x - 1 = 0$ построим график.

x	f (x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575

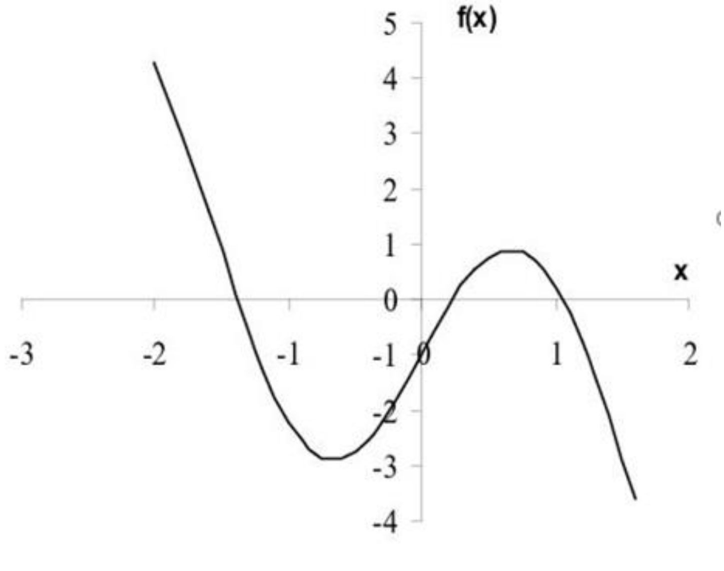


Рис. 1.1. график для функции $f(x) = 3\sin(2x) - 1{,}5x - 1 = 0$

На графике видно, что уравнение имеет три корня, принадлежащие отрезкам [-1.6, -1], [0, 1] и [1, 2]. Эти отрезки можно выявить и наблюдая за сменой знаков функции в таблице. По построенному графику можно сделать вывод, что на указанных отрезках функция f(x) монотонна и, следовательно, на каждом из них содержится только по одному корню.

2.1.2. Уточнение корней уравнения

Уточнение приближенных корней - вычисление корня из выбранного промежутка с заданной степенью точности, т.е. с заданной погрешностью ε . Это означает, что вычисленное значение корня x должно отличаться от точного x^* не более чем на величину ε: $|x^* - x| \le \varepsilon$

Процедура численного определения приближенных значений корней нелинейных уравнений, как правило, состоит в выборе начального приближения к корню $x \in [a, b]$, которое можно определить локализацией и вычислении по некоторой формуле последующих приближений $x_1, x_2, ..x_k$.

Каждый такой шаг называется *итерацией* (от латинского iteratio – повторение), а сами методы уточнения – *итерационными методами*.

В результате итераций получается последовательность приближенных значений корня $x_0, x_1, ..x_k$ которая называется итерационной последовательностью. Если эти значения с ростом k стремятся к точному значению корня $x*$, т.е. существует

$$\lim_{k \to \infty} \{x_k\} = x^*$$

то говорят, что итерационный процесс сходится.

Сходимость итерационного процесса означает, что погрешность каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, т.е. погрешность приближенных значений с каждым шагом должна уменьшаться:

$$|x^* - x_{k+1}| < |x^* - x_k|$$

2.2 Методы уточнения корней

2.2.1. Метод половинного деления (дихотомии)

В этом методе на каждом шаге отрезок делится на две равные части. Затем сравнивают знаки функции на концах каждой из двух половинок (например, по знаку произведения значений функций на концах), определяют ту из них, в которой содержится решение (знаки функции на концах должны быть разные), и сужают отрезок, перенося в найденную точку его границу (a или b).

Считаем, что отделение корней уравнения $f(\mathrm{x}) = 0$ проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень, который необходимо уточнить с погрешностью ε. В качестве начального приближения корня принимаем середину этого отрезка: $c_0 = \frac{a+b}{2}$ (рис. 2.1.). Затем исследуем значения функции на концах отрезков $[a_1 c_0], [c_0, b]$ Тот из отрезков, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$.

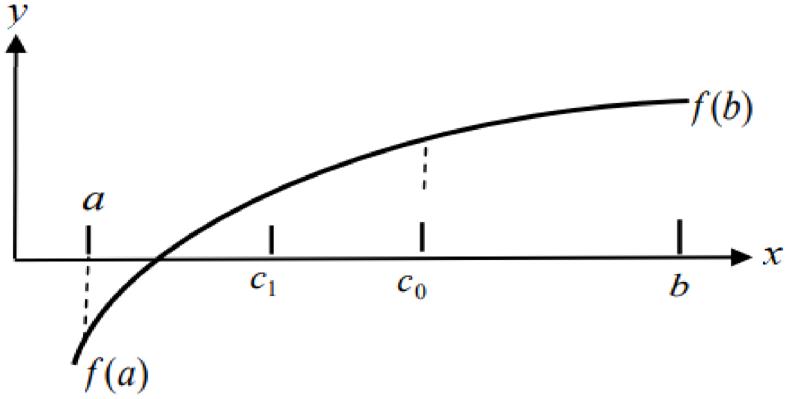


Рис 2.1.

Вторую половину отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, отбрасываем. В качестве следующего приближения корня принимаем середину нового отрезка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и т.д.

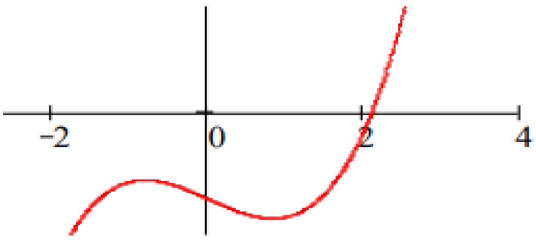
Прекратить итерационный процесс следует, когда будет достигнута заданная точность, т.е. при выполнении условия $|x^* - C_k| < \varepsilon$. Поскольку корень $x*$ принадлежит отрезку $[a_k, b_k]$, а C_k – середина этого отрезка, то величина $|x^* - C_k| <$ всегда будет меньше половины длины отрезка $[a_k, b_k]$, т.е. $|x^* - c_k| < \frac{|b_k - a_k|}{2}$. Следовательно, условие $|x^* - C_k| < \varepsilon$ будет выполнено, если
$|b_k - a_k| < 2\varepsilon$ (2.6)

Таким образом, итерационный процесс нужно продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие (2.6).

Пример: найти корни алгебраического уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ методом половинного деления.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

1. Локализуем корни уравнения графическим методом, из графика следует, что один корень есть на отрезке $[a, b] = [\,1{,}5;\ 3]$. Обозначим данные переменные, точность приближения



$f(x) = x^3 - 2x - 5$ a:= 1.5 b:=3 e:=0.01

2.Вычисляем значение функции на концах отрезка и первое приближение

f (a) = - 4.625 f (b) = 16 $c_0 := \frac{a+b}{2}$ c0= 2.25 f (c0) = 1.891

Так как $f(c0) > 0$, $f(a) < 0$ то новый отрезок бут составлять $[a1, b1] = [1{,}5;\ 2{,}25]$. (отрезок, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень)

3. Проверим условие $|b_1 - a_1| < 2\varepsilon$: $|b_1 - a_1| = 0.75$ что больше 2*0.01. Условие не выполнено, следовательно повторяем шаг №2 используя новые значения отрезка до тех пор пака не выполнится условие точности приближения.

(a1:= 1.5 b1:=2.25 $c_1 := \frac{a1+b1}{2}$ c1= 1.875 f (c1) = - 2.158

Новый отрезок $[a2, b2] = [1.875;\ 2.25]$. Проверка условия … и т.д.)

По окончанию седьмого приближения условие выполнится со следующими значениями:

a:= 2.087 b:=2.11 $c_7 := \frac{a7+b7}{2}$ c7= 2.099 f (c1) = 0.044

Новый отрезок $[a8, b8] = [2.087;\ 2.099]$. Проверка условия $|b_1 - a_1| < 2\varepsilon$: $|b_1 - a_1| = 0.012$ что меньше 2ε =0.02

Ответ: 2.099 (c7)

2.2.2 Метод хорд

В этом методе нелинейная функция $f(x)$ на отделенном интервале $[\mathrm{a}, b]$ заменяется линейной – уравнением хорды, т.е. прямой соединяющей граничные точки графика на отрезке (Рис.3.1.). Условие применимости метода – монотонность функции на начальном отрезке, обеспечивающая единственность корня на этом отрезке. Расчет по методу хорд аналогичен расчету методом деления отрезка пополам, но теперь на каждом шаге новая точка x внутри отрезка $[a, b]$ рассчитывается по любой из следующих формул:

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b) = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b)-f(a)}$$

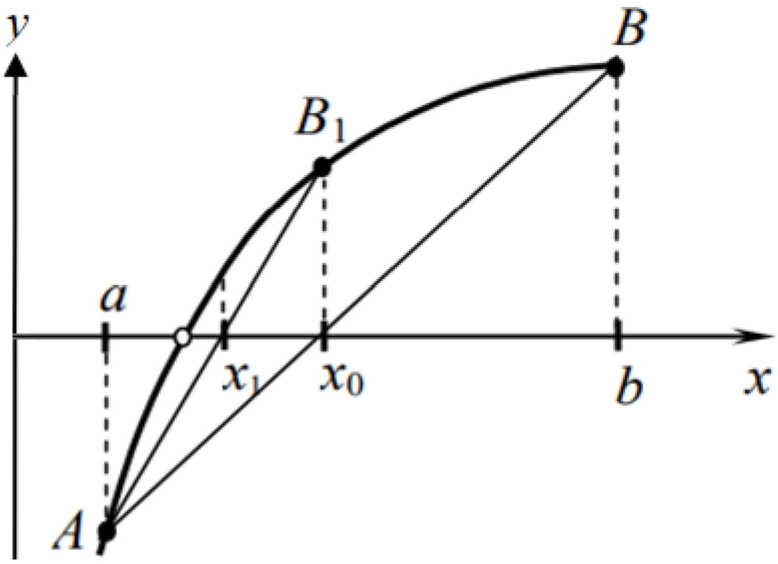
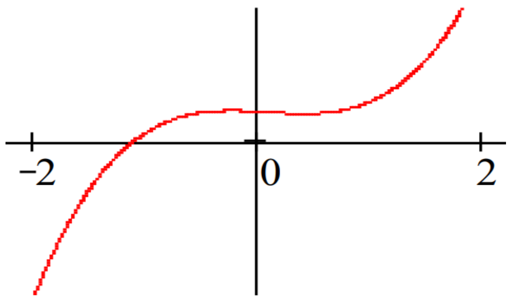


Рис.3. 1.

Пример: найти корни алгебраического уравнения $x^3 - 0.2x^2 - 0.3x + 1.3$ методом хорд.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

1. Локализуем корни уравнения графическим методом, из графика следует, что один корень есть на отрезке $[a, b] = [-2;\ 0]$. Обозначим данные переменные, точность приближения



$f(x) := x^3 - 0.2x^2 - 0.3x + 1.3$ a:= -2   b:=0   e:=0.01

2.Вычисляем значение функции на концах отрезка и первое приближение

f (a) = - 6.9   f (b) = 1.3 $x_0 := a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ x_0= -0.317   f (x_0) = 1.343

Так как $f(x_0) > 0$, $f(a) < 0$ то новый отрезок бут составлять $[a1, b1] = [-2;\ -0.317]$. (отрезок, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень) a1:= -2 b1:=-0,317 $x_0 := a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ x_1= -0.591 f (x_0) = 1.201

3. Проверим условие $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$: $|x_1 - x_0| = 0.274$ что больше 0.01. Условие не выполнено, следовательно повторяем шаг №2 используя новые значения отрезка до тех пор пака не выполнится условие точности приближения.

По окончанию восьмого приближения условие выполнится со следующими значениями:

$x_6 := a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ x_6= -1.109 f (x_6) = 0.048

a1:= -2 b1:=-1.102 $x_7 := a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ x_7= -1.102

Проверка условия $|x_7 - x_6| < \varepsilon$: $|x_7 - x_6| = 0.007$ что меньше ε =0.01

Ответ: -1.102 (x_7)

2.2.3 Метод Ньютона (метод касательных)

Идея, на которой основан метод, аналогична той, которая реализована в методе хорд, только на каждом шаге кривая $f(x)$ заменяется касательной к ней, проведенной в предыдущей найденной точке и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс.

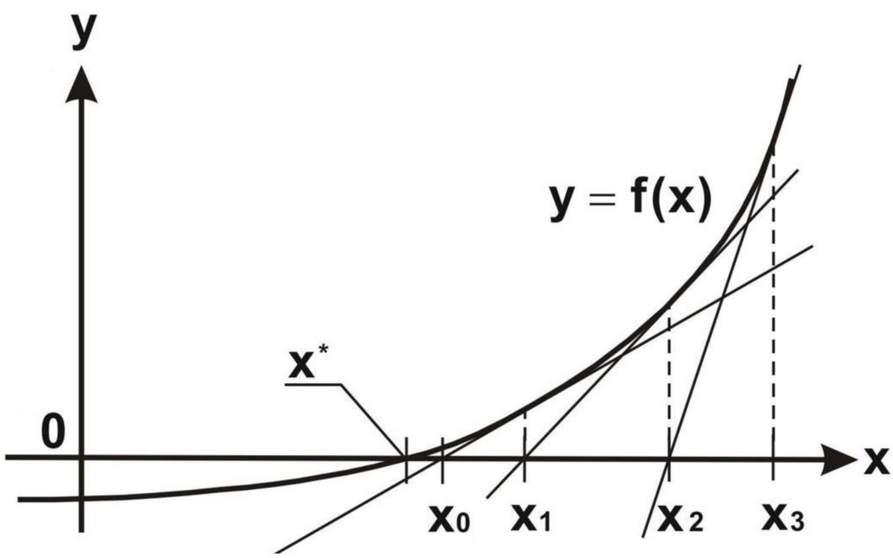


Рис.4. 1.

В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется левая граница отрезка, содержащего корень $x_0 = $ a (если f(a) f''(x) > 0), или правая его граница: $x_0 = b$ (если $f(b)\, f''$(x) > 0).

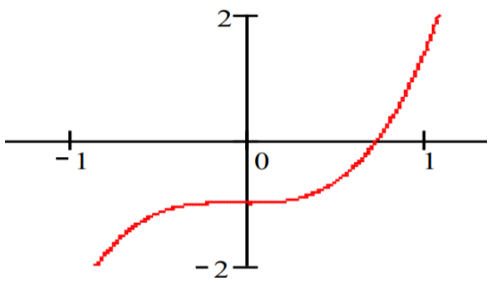
Расчет нового приближения на следующем шаге i+1 производится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Пример: найти корни алгебраического уравнения $2x^3 - \cos x = 0$ методом половинного деления.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

1. Локализуем корни уравнения графическим методом, из графика следует, что один корень есть на отрезке $[a, b] = [\,0;\ 1]$. Обозначим данные переменные, точность приближения



$2x^3 - \cos x = 0$ a:= 0 b:=1 e:=0.001

Проверим условие Фурье $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$, приняв за начальное приближение конец интервала $x_0 = 1$

$$x_0 := 1 \qquad x := 0, 0.01\,..\,1 \qquad f(x_0) = 1.4597$$

$$d2f(x) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$ -вторая производная

$$f(x_0)d2f(x_0) = 18.305$$

Условие Фурье выполнено, значит итерационный процесс сходится.

2. Вычислим первое приближение

$$df(x) := \frac{d}{dx} f(x) \qquad x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)} \qquad x_1 = 0.7866$$

3. Проверим условие окончания итерационного процесса $|x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i-1}}| < \varepsilon$: $|x_1 - x_0| = 0.2134$ что больше 0.01. Условие не выполнено, следовательно повторяем шаг №2 используя новые значения отрезка до тех пор пака не выполнится условие точности приближения.

По окончанию четвертого приближения условие выполнится со следующими значениями

$$x_4 := x_3 - \frac{f(x_3)}{df(x_3)} \qquad x_4 = 0.7214 \qquad |x_4 - x_3| = 0.000028$$

Ответ: $x = 0.7214$

Вопросы для самоконтроля для самоконтроля:

1. Что принимается за начальное приближение в методе Ньютона?
2. Каково условие окончания итерационного процесса?
3. Какие функции в системе MathCAD организуют итерационный процесс при решении методом Ньютона?
4. Как отыскать первое приближение корня в методе половинного деления?
5. Каково условие прекращения итерационного процесса в методе половинного деления?
6. Каковы недостатки метода половинного деления?

Лабораторная работа к главе 2

Метод Ньютона, метод половинного деления, метод хорд.

Цель работы: изучить методы приближенного решения уравнений- метод Ньютона, метод половинного деления, метод хорд, а также функции системы MathCAD, реализующие этот метод.

Задание: Решить уравнения методами половинного деления, методом хорд и методом Ньютона с точностью до 0.001 при помощи MathCAD.

№ варианта			
1	$x^4 - x - 1 = 0$	$x - \sin x = 0.25$	$2x - \lg x = 7$
2	$2x^4 - x^2 - 10 = 0$	$tg(0.58x + 0.1) = x^2$	$3x - e^x = 0$

3	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	$x2^x + 6 = 1$	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$
4	$cos\,x - 2x = 0$	$x - cos\,x = 0$	$2x + lg(2x+3) = 1$
5	$e^{2x} - cos\,x = 0$	$lg - \frac{7}{2x+6} = 0$	$x = (x+1)^3$
6	$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$	$x^3 = sin\,x$	$x + lg(x+1) = 1.5$
7	$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$	$Ctgx - x\,/\,3 = 0$	$x(x+1)^2 = 1$
8	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x = 0$	$tg(0.44x + 0{,}3) = x^2$	$2x + lg\,x = -0.5$
9	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	$3x - cos\,x - 1 = 0$	$5x - 8\,ln\,x = 8$
10	$sin(e^x) + 3x = 0$	$x\,lg\,x - 1.2 = 0$	$x + cos\,x = 1$
11	$xe^x + 3x - 5 = 0$	$tg(0.47x + 0.2) = x^2$	$x2^x = 1$
12	$x^5 - x^2 - 60x + x - 8 = 0$	$x^2 - 8\sin x = 0$	$x - cos\,x = 0$
13	$x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$	$2x - lg\,x - 7 = 0.5$	$\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$
14	$2x^3 - 3x^2 - 12 + 1 = 0$	$(x-1)2^x = 1$	$lg(x+2) + 2x = 3x$
15	$x^2 - 5\,sin\,x = 0$	$x + lg\,x = 0.5$	$2 - x = ln\,x$
16	$sin\,x - {}^{1}/_{x} = 0$	$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$	$Ctgx = x$
17	$lg\,x - cos\,x = 0$	$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$	$x^2 - sin\,10x = 0$
18	$3^{3-x} - cos\,x = 0$	$x2^x + 6 = 1$	$x - sin\,x = 0.2s^2$
19	$cos\,3x - x^3 = 0$	$tg(0.5x + 0.2) = x^2$	$x\,ln(x+1) - 0.3 = 0$
20	$tgx + x = 1$	$3x - cos\,x - 1 = 0$	$tg\,3x + 0.4 = x^2$
21	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	$x^2 = sin\,x$	$x^2 + 1 = tg\,x$
22	$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$	$x + lg\,x = 0.5$	$x^2 - 1 = ln\,x$
23	$6x^4 + x^3 - 2x^2 + 4 = 0$	$x^2 + 4\,sin\,x = 2$	$0.5^x + 1 = (x-2)^2$
24	$e^{-cos\,x} - x^3 = 0$	$x^2 = arcsin(x - 0.2)$	$(x+3)\,cos\,x = 1$
25	$x^4 - sin^2\,x + x - 1 = 0$	$Ctgx - x^2 = 0$	$2^x(x-1)^2 = 2$
26	$e^{2x}\,ln(x) - x = 0$	$tg\,x = cos\,x - 0.1$	$x\,ln(x+1) = 0.5$
27	$e^{(x-5)} + 3 = 0$	$x^3 - 2x^2 + 2x - 6 = 0$	$x2^{2x} = 1$

28	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$	$x^2 - 8\sin x = 0$	$\sqrt{x} - \cos x = 0$
29	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$	$x(x+1)^2 = 1$	$x^2 + 1 = \arccos x$
30	$tgx^2 + x = 1$	$2x + lg\, x = -0.5$	$x^3 = e^x - 1$

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Постановка задачи

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одна из наиболее часто встречающихся задач в научно-технических исследованиях, математической физике (численное решение дифференциальных и интегральных уравнений), экономике, статистике.

Все методы решения СЛАУ делятся на две группы – точные (прямые) и итерационные. Точные методы позволяют получить решение системы линейных уравнений за конечное число арифметических операций. Использование итерационных методов дает возможность найти приближенное решение системы с заданной степенью точности.

Постановка задачи.

Требуется найти решение системы m линейных уравнений, которая записывается в общем виде как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

причём числа a_{ij} называются коэффициентами при неизвестных; c_m - свободными членами.

Эту систему уравнений можно записать также в матричном виде $AX = C$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

A – матрица системы, $C-$ вектор свободных коэффициентов, X– вектор неизвестных.

Решение системы — это при известных A и C найти такие $(x_1, x_2, \dots x_m)$, при подстановке которых в систему уравнений она превращается в тождество.

Необходимым и достаточным условием существования единственного решения СЛАУ является условие $det\, A \neq 0$, т.е. определитель матрицы A не равен нулю. В случае равенства нулю определителя матрица A называется вырожденной и при этом СЛАУ либо не имеет решения, либо имеет их бесчисленное множество.

Две системы уравнений называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений. Эквивалентность матриц A и B обозначается: A ~ B.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если она имеет более одного решения.

3.2 Решение систем линейных уравнений матричным способом

Требуется найти решение системы m линейных уравнений с m числом неизвестных (частный случай СЛУ), которая записывается в общем виде как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = c_m \end{cases}$$

По правилу умножения матриц систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = C$.

Решением матричного уравнения является такой вектор столбец X, который обращает уравнение в тождество. $X = A^{-1}C$

Поскольку обратную матрицу можно найти только при условии, что $det\, A \neq 0$, то и сам матричный способ решения системы линейных уравнений можно применять при выполнении этого условия.

3.3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Требуется найти решение системы m линейных уравнений с m числом неизвестных (частный случай СЛУ) при условии, что основной определитель системы не равен нулю: det A = Δ ≠ 0.

Пусть A - основная матрица системы (матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных). Рассмотрим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ c_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & c_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & c_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}; \; \dots \quad \Delta_{x_m} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \dots \Delta_{x_m}$- определители матриц, которые получаются из A заменой 1-ого, 2-ого, …, n-ого столбца соответственно на столбец свободных членов.

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$; … $x_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta x_{\mathrm{m}}}{\Delta}$

При $det\, A = \Delta = \Delta x_i = 0;\ i = \overline{1,n}$ система вида имеет бесконечное множество решений.

В случае, если $det\, A = \Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta x_i \neq 0;\ i = \overline{1,n}$ система не имеет решений.

Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера. Основным недостатком метода Крамера является трудоемкость вычисления определителей, когда число уравнений системы больше трех.

3.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса является наиболее распространённым методом решения систем линейных уравнений с m линейных уравнений и m числом неизвестных, так и произвольных систем m линейных уравнений с n неизвестными вида.

Метод Гаусса — это метод последовательного исключения неизвестных.

Процесс исключения неизвестных состоит в переводе исходной системы линейных уравнений в такую равносильную систему, в которой каждое следующее уравнение содержит, по крайней мере, одним неизвестным меньше, чем предыдущее. Пусть в системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

первый элемент $a_{11} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом первой строки. Поделим все элементы этой строки на a_{11} и исключим x_1 из всех последующих строк, начиная со второй, путем вычитания первой (преобразованной), умноженной на коэффициент при x_1 в соответствующей строке. Получим

$$\begin{cases} x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}x_n = c_1 \\ \qquad \mathrm{a}_{22}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}x_n = c_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

Если $a_{22} \neq 0$, то, продолжая аналогичное исключение, приходим к системе уравнений с верхней треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 + \mathrm{a}_{13}x_3 + \cdots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}x_n = c_1 \\ \qquad x_2 + \mathrm{a}_{23}x_3 + \cdots + \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad x_3 + \cdots + \mathrm{a}_{3\mathrm{n}}x_n = c_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = c_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

Таким образом, находим x_n элемент, подставляя его в предыдущее выражение находим значения x_{n-1}. Далее подставляя полученные значения в предыдущие выражения, получим оставшиеся x_i в обратном порядке

3.5 Решение систем линейных уравнений методом итераций

Требуется найти решение системы m линейных уравнений с m числом неизвестных (частный случай СЛУ), которая записывается в общем виде как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

Суть алгоритма простых итераций в следующем:

1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = ax + \beta$ одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

3. Вычислить следующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = ax^{(k)} + \beta.$$

4. Если выполнено условие $\frac{|x^{(k+1)} - x^k|}{|x^{(k+1)}|} < \varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x^* = x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.

Теорема. Процесс итерации для приведенной линейной системы сходится к единственному ее решению, если какая - ни будь каноническая норма матрицы A меньше единицы, т.е. для итерационного процесса достаточное условие есть $a < 1$.

Следствие 1. Процесс итерации для системы сходится, если:

$\|a\|_m = max \sum_{ij} |a_{ij}| < 1$ (m-норма или неопределенная норма)

$\|a\|_l = max \sum_{ji} |a_{ji}| < 1$ (l-норма или норма L1)

Или $\|a\|_k = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2} < 1$ (k-норма или Евклидова норма).

Следствие 2. Для системы процесс итерации сходится, если выполнены неравенства: $|a_{ij}| > \sum_{j-1}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1,2, \dots n)$

Или $|a_{ij}| > \sum_{i-1}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1,2, \dots n)$

т.е. сходимость имеет место, если модули диагональных элементов матрицы А системы или каждой строки превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей недиагональных элементов этого столбца

Пример нахождения нормальной матрицы.

Пусть матрица А равна $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Имеем:

$$\|a\|_m = max(1 + 2 + 3, \;\; 4 + 5 + 6, \;\; 7 + 8 + 9) = \max(6, 15, 24) = 24$$

$$\|a\|_l = max(1 + 4 + 7, \;\; 2 + 5 + 8, \;\; 3 + 6 + 9) = \max(12, 15, 18) = 18$$

$$\|a\|_k = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{285} = 16.9$$

Аналогично в Mathcad существуют специальные функции для вычисления норм матриц:

normi(a) Возвращает неопределенную норму матрицы А.

norm1(a) Возвращает L1, норму матрицы А.

norme(a) Возвращает Евклидову норму матрицы А.

Пример. Решить систему методом итераций.

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68 \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60 \end{cases}$$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Диагональные коэффициенты 20; 20; 10 системы значительно преобладают над остальными коэффициентами при неизвестных, т.е., выполняется следствие 2.

Приведем эту систему к нормальному виду

$$20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68$$
$$2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41$$
$$3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60$$

$$x1 = -\frac{3}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3 + \frac{68}{20}$$
$$x2 = -\frac{1}{20}x_1 - \frac{3}{20}x_3 + \frac{41}{20}$$
$$x3 = -\frac{3}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{60}{10}$$

Образуем матрицы

$$a := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \\ \frac{-1}{10} & 0 & \frac{-3}{20} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta := \begin{pmatrix} \frac{68}{20} \\ \frac{41}{20} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Проверка достаточного условия сходимости

$$\mathrm{normi}(a) = 0.4$$
$$\mathrm{norml}(a) = 0.397$$
$$\mathrm{norme}(a) = 0.4$$

Норма матрицы меньше единицы, поэтому итерационный процесс сходится.

Обозначим количество итераций и итерационную формулу

$i := 0..8$ $\qquad x^{(0)} := \beta$ $\qquad x^{(i+1)} := ax^{(i)} + \beta.$

x =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.4	2.79	3.04	2.98	3	2.99	3	3	3	3
1	2.05	0.81	1.05	1.05	0.98	0.99	1	1	1	1
2	6	4.77	5.08	4.98	5	4.99	5	5	5	5

точность вычислений

$$\varepsilon_k := \frac{\left|x^{(k+1)} - x^k\right|}{\left|x^{(k+1)}\right|} \qquad \varepsilon_5 = 1.121 * 10^{-4}$$

найдем теоретически номер i нужной итерации, которая обеспечит точность 0,001 i-го приближениях

$$\beta := \begin{pmatrix} \frac{68}{20} \\ \frac{41}{20} \\ 6 \end{pmatrix} \qquad |3.4| + |2.05| + |6| = 11.45$$

тогда номер i ищется по формуле i $\geq \frac{lg\,\varepsilon + lg(1-|a|) - \lg|h|}{lg(|a|)}$

$$\frac{lg(\varepsilon, 10) + lg(0.6, 10) - \lg(11.45, 10)}{lg(0.4, 10)} \; 13.146$$

теоретически количество итераций равно 13, а практически оказалось с гарантией 6

Ответ: $x^{(6)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Вопросы для самоконтроля к методу итераций:

1. Каковы условия сходимости итерационного процесса в приближенном методе простых итераций?

2. Что называют нормой матрицы? Какие виды норм матрицы Вы знаете?

3. Как вычислить в Mathcad нормы матрицы?

4. Каково достаточное условие сходимости метода итераций?

3.6 Решение систем линейных уравнений методом Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ -го приближения неизвестной x_i ,учитываются уже вычисленные ранее k-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots x_{i-1}$.

Суть алгоритма простых итераций в следующем:

1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = ax + \beta$ одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

3. Вычислить следующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + \beta.$$

где L – нижняя треугольная матрица, а U- верхняя треугольная матрица

$$(F_{ij} := if\left(i > j, A_{i,j}, 0\right) \qquad U_{ij} := if\left(i \le j, A_{i,j}, 0\right))$$

4. Если выполнено условие $\left|\mathrm{x}^{(\mathrm{i})} - \mathrm{x}^{(\mathrm{i}-1)}\right| \cdot \frac{\mathrm{norm1(U)}}{1-\mathrm{norm1(a)}} < \varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x^{*} = x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но приводит к более громоздким вычислениям.

Пример. Решить систему методом итераций.

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200 \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600 \\ 1x_1 + 2x_2 + 100x_3 = 500 \end{cases}$$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Приведем эту систему к нормальному виду

$$\begin{matrix} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200 \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600 \\ 1x_1 + 2x_2 + 100x_3 = 500 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x1 = -\frac{3}{50}x_2 + \frac{1}{50}x_3 + 2 \\ x2 = -\frac{3}{100}x_1 + \frac{1}{20}x_3 + 3 \\ x3 = -\frac{1}{100}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + 5 \end{matrix}$$

Образуем матрицы и проверим достаточные условия сходимости

$$a := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{-3}{100} & 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{-1}{100} & \frac{-1}{50} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{normi}(a) = 0.08 \\ \mathrm{norm1}(a) = 0.089 \\ \mathrm{norme}(a) = 0.08 \end{matrix}$$

Норма матрицы меньше единицы, поэтому итерационный процесс сходится.

Обозначим дополнительные матрицы

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{100} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{100} & \frac{-1}{50} & 0 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{50} & \frac{1}{50} \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим количество итераций и итерационную формулу

$i := 0..8$ $\quad\quad x^{(0)} := \beta$ $\quad\quad x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + \beta$

x =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	1.92	1.907	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905
1	3	3.19	3.188	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193
2	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

точность вычислений

$$\varepsilon_i := \left|\mathrm{x}^{(\mathrm{i})} - \mathrm{x}^{(\mathrm{i}-1)}\right| \cdot \frac{\mathrm{norm1(U)}}{1 - \mathrm{norm1(a)}} \qquad \varepsilon_3 = 3.601 * 10^{-4}$$

Ответ: $x^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.905 \\ 3.193 \\ 4.917 \end{pmatrix}$

3.7 Решение систем линейных уравнений методом прогонки

Часто возникает необходимость в решении СЛАУ, матрицы которых являются слабо заполненными (содержат много нулевых элементов), но имеют определенную структуру. Для решения систем с ленточными матрицами коэффициентов вместо метода Гаусса можно использовать более эффективные методы, например, метод прогонки.

Рассмотрим наиболее простой случай: систему с трех диагональной матрицей коэффициентов. В этом случае СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} -c_1x_1 + b_1x_2 = f_1 & (1) \\ a_ix_{i-1} - c_ix_i + b_ix_{i+1} = f_i & (2) \\ a_mx_{m-1} - c_mx_m = f_m & (3) \end{cases}$$

Это хорошо видно из следующего эквивалентного вектор матричного представления:

$$\begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a_4 & -c_4 & b_4 & 2 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m-1} & -c_{\mathrm{m}-1} & b_{\mathrm{m}-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_m & -c_{\mathrm{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix}$$

Если при этом выполняется условие $|c_i| \geq |b_i| + |a_i|$, то говорят, что матрица данной системы имеет диагональное преобладание.

В методе прогонки решение системы ищется в виде

$$x_i = a'_i x_{i+1} + b'_i \qquad (4)$$

где a'_i b'_i , – прогоночные коэффициенты.

Записав уравнение (1) в виде данной формулы (4): $x_1 = \frac{b_1}{c_1} x_2 - \frac{f_1}{c_1}$, получим формулы для определения α'_2, b'_2: $a'_2 = \frac{b_1}{c_1}, b'_2 = -\frac{f_1}{c_1}$.

Аналогично уменьшим в (4) индекс на единицу и подставим полученное выражение в (2): $a_i a'_i x_i + a_i b'_i - c_1 x_i + b_i x_{i+1} = f_i$

откуда $x_i = \frac{b_i}{c_i - a_i a'_i} x_{i+1} + \frac{a_i b'_i - f_i}{c_i - a_i a'_i}$.

Данное равенство совпадает с (4), если при всех $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ выполняются рекуррентные соотношения $a'_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i a'_i}$; $b'_{i+1} = \frac{a_i b'_i - f_i}{c_i - a_i a'_i}$ (5)

Они позволяют получить все остальные коэффициенты a'_i, b'_i .

При $i = m - 1$ из (4) получим $x_{m-1} = a'_m x_{\mathrm{m}} + b'_m$. Подставляя это выражение в (3) и разрешая полученное выражение относительно x_m, записываем: $x_m = \frac{a_m b'_m - f_m}{c_m - a_m a'_m}$

где a_m и b_m известны. Далее по формулам (4) последовательно находятся $x_{m-1}, x_{m-2}, \ldots x_1$.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогоночных коэффициентов в формуле (5) не обращаются в нуль, и устойчивой, если $|a_i| < 1$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Теорема. Пусть коэффициенты a_i, b_i уравнения (2) отличны от нуля и пусть $|c_i| \geq |b_i| + |a_i|$ при $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Тогда прогонка корректна и устойчива.

Условия этой теоремы, которые во многих приложениях выполняются автоматически, являются достаточными условиями корректности и устойчивости прогонки. Если эти условия не выполняются, то можно организовать выбор главного элемента аналогично схеме Гаусса.

Пример. Решить систему методом прогонки.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Приведем эту систему к векторно-матричному представлению:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & 0 \\ 5x_1 & 4x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_2 & -3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов a_i' и b_i', где i – номер строки матрицы. Этот этап выполняется при i = 1...n строго по возрастанию значения i.

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

В первой строке матрицы (i = 1) используются формулы:

$$y_0 := b_0 \qquad A_0 := \frac{-c_0}{y_0} \qquad B_0 := \frac{d_0}{y_0}$$

Для строк i от 1 до n-1 используются рекуррентные формулы:

$$n := 2 \qquad j := 1..n$$

$$y_i := (a_i A_{i-1} + b_i) \qquad A_i := \frac{-c_i}{y_i} \qquad B_i := \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{y_i}$$

При i = n прямая прогонка завершается вычислением

$$y_n := (a_n A_{n-1} + b_n) \qquad B_n := \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{y_n}$$

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных xi. Этот этап выполняется при $i = n...1$ строго по убыванию значения i. В последней строке матрицы (i = n)

$$x_n := B_n$$

Для всех остальных строк при i от n-1 до 1 применяется формула

$i := n - 1..0$ $\qquad$ $x_i := A_i x_{i+1} + B_i$

Ответ: $\quad x = \begin{pmatrix} 1.488 \\ -0.023 \\ -0.674 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа к главе 3

Решение систем линейных методом простых итераций и методом Зейделя

Цель работы: изучить методы итераций, метод Зейделя.

Задание 1. Решите систему линейных уравнений методом итераций.
Задание 2. Решите систему линейных уравнений методом Зейделя.
Оценните погрешность вычислений.

Варианты:

1. $\begin{cases} 24.3x_1 + 2.9x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 1 \\ 5.6x_1 + 38.3x_2 + 9.2x_3 + 3.5x_4 = 4.5 \\ 6.3x_1 + 8.6x_2 + 22.1x_3 + 8.9x_4 = 8.1 \\ 7.9x_1 + 7.5x_2 + 4.5x_3 + 27.2x_4 = 5.7 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 100.51x_1 + 1.9x_2 + 0.3x_3 = 1.1 \\ 1.9x_1 + 103.2x_2 + 0.5x_3 = 1.2 \\ 3.6x_1 + 100.3x_2 + 1.4x_3 = 5.2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10.7x_1 + 0.3x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 0.4 \\ 0.9x_1 + 11.4x_2 + 0.4x_3 + 0.4x_4 = 0.2 \\ 0.8x_1 + 1.6x_2 + 10.8x_3 + 0.7x_4 = 0.9 \\ 0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 10.4x_4 = 0.5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 10.51x_1 + 0.29x_2 + 0.13x_3 = 1.4 \\ 0.95x_1 + 10.32x_2 + 1.43x_3 = 4.9 \\ 0.71x_1 + 0.94x_2 + 00.26x_3 = 1.7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 141.1x_1 + 3.2x_2 + 5.1x_3 + 5.8x_4 = 3.9 \\ 6.6x_1 + 181.4x_2 + 8.2x_3 + 9.9x_4 = 7.2 \\ 9.3x_1 + 7.6x_2 + 191.1x_3 + 3.8x_4 = 8.1 \\ 7.9x_1 + 5.5x_2 + 4.2x_3 + 141.7x_4 = 9.1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 10.24x_1 + 5.29x_2 + 7.21x_3 = 5.9 \\ 0.96x_1 + 10.42x_2 + 3.69x_3 = 8.6 \\ 3.71x_1 + 7.47x_2 + 10.22x_3 = 9.4 \end{cases}$

4. $$\begin{cases} 12.6x_1 - 3.1x_2 - 2.7x_3 - 2.5x_4 = 1.6 \\ 4.6x_1 - 11.4x_2 - 1.2x_3 - 3.7x_4 = -4.8 \\ 1.3x_1 - 6.6x_2 - 14.1x_3 - 1.6x_4 = -2.2 \\ 3.9x_1 + 2.7x_2 - 2.8x_3 - 11.3x_4 = 0.3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -100.3x_1 - 0.9x_2 + 0.3x_3 = 1.6 \\ -0.5x_1 + 100.2x_2 - 0.8x_3 = 1.59 \\ -0.1x_1 - 0.7x_2 + 100.2x_3 = 2.7 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 17.8x_1 + 9.5x_2 - 3.7x_3 - 9.3x_4 = 7.4 \\ 4.9x_1 - 14.8x_2 - 6.9x_3 - 7.6x_4 = -4.9 \\ 7.6x_1 - 3.6x_2 - 19.1x_3 + 6.6x_4 = 6.2 \\ 8.4x_1 + 4.7x_2 - 2.8x_3 - 11.3x_4 = 4.3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.8x_1 + 5.6x_2 - 2.6x_3 = 8.12 \\ 8.5x_1 - 10.9x_2 + 5.8x_3 = 9.5 \\ 9.4x_1 + 0.6x_2 - 10.7x_3 = 5.13 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 10.6x_1 - 0.1x_2 - 0.7x_3 - 0.5x_4 = 1.8 \\ 4.9x_1 - 17.4x_2 - 8.2x_3 + 9.2x_4 = 3.9 \\ 7.6x_1 + 1.6x_2 + 11.1x_3 - 1.3x_4 = 5.9 \\ 8.4x_1 + 9.7x_2 - 6.8x_3 - 17.9x_4 = 4.6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.3x_1 - 6.3x_2 - 2.6x_3 = 8.3 \\ 8.5x_1 + 10.2x_2 - 9.8x_3 = 9.5 \\ 7.3x_1 + 3.7x_2 + 10.8x_3 = 9.1 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 12.6x_1 - 5.1x_2 + 0.7x_3 - 0.5x_4 = 2.8 \\ 4.9x_1 - 17.4x_2 - 8.2x_3 + 9.2x_4 = 3.9 \\ 5.4x_1 + 1.6x_2 + 11.1x_3 - 1.3x_4 = 3.9 \\ 8.2x_1 + 6.7x_2 - 6.8x_3 + 17.9x_4 = 2.6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.6x_1 - 0.6x_2 + 0.9x_3 = 1.6 \\ 1.9x_1 - 10.9x_2 - 0.4x_3 = 1.3 \\ 2.3x_1 + 0.6x_2 + 10.7x_3 = 2.2 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 12.6x_1 - 3.1x_2 - 2.7x_3 - 2.5x_4 = 1.6 \\ 4.6x_1 - 11.4x_2 - 1.2x_3 - 3.7x_4 = -4.8 \\ 1.3x_1 - 6.6x_2 - 14.1x_3 - 1.6x_4 = -2.2 \\ 3.9x_1 + 2.7x_2 - 2.8x_3 - 11.3x_4 = 0.3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.6x_1 - 7.9x_2 - 8.3x_3 = 2.11 \\ -3.5x_1 + 10.2x_2 - 3.8x_3 = 3.57 \\ 5.1x_1 + 7.7x_2 - 10.2x_3 = 6.93 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 10.7x_1 - 0.3x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 0.4 \\ 0.9x_1 + 11.4x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 = 0.2 \\ 0.8x_1 + 1.6x_2 - 12.8x_3 + 0.7x_4 = 0.9 \\ 0.2x_1 - 0.4x_2 - 0.2x_3 - 10.4x_4 = 0.5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.51x_1 - 0.2x_2 + 0.13x_3 = 1.4 \\ 0.95x_1 - 10.3x_2 + 1.43x_3 = 4.9 \\ 0.71x_1 - 0.94x_2 + 10.26x_3 = 1.7 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 14.1x_1 - 3.2x_2 + 5.1x_3 + 5.8x_4 = 3.9 \\ 6.6x_1 - 18.4x_2 + 8.2x_3 - 9.9x_4 = 7.2 \\ 9.3x_1 - 7.6x_2 + 19.1x_3 - 3.8x_4 = 8.1 \\ 7.9x_1 - 5.5x_2 + 4.2x_3 - 14.7x_4 = 9.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.24x_1 + 5.29x_2 - 7.2x_3 = 5.9 \\ 0.96x_1 - 10.4x_2 + 3.6x_3 = 8.6 \\ 3.71x_1 - 7.47x_2 - 10.2x_3 = 9.4 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} 15.1x_1 - 3.2x_2 + 5.1x_3 + 5.8x_4 = 13.9 \\ 10.6x_1 - 18.4x_2 + 8.2x_3 - 9.9x_4 = 7.2 \\ 9.3x_1 - 7.6x_2 + 19.1x_3 - 3.8x_4 = 18.1 \\ 5.9x_1 - 5.5x_2 + 4.2x_3 - 14.7x_4 = 9.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10.24x_1 + 5.29x_2 - 7.1x_3 = 5.9 \\ 2.96x_1 + 11.42x_2 + 3.9x_3 = 1.6 \\ 4.71x_1 - 7.47x_2 - 15.2x_3 = 0.4 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} 11.8x_1 + 9.5x_2 - 3.7x_3 - 9.3x_4 = 7.4 \\ 0.9x_1 - 14.8x_2 - 6.9x_3 - 7.6x_4 = -4.9 \\ 7.6x_1 - 3.6x_2 - 19.1x_3 + 6.6x_4 = 1.2 \\ 8.4x_1 + 4.7x_2 - 2.8x_3 - 11.3x_4 = 4.3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 109.24x_1 + 5.29x_2 - 7.21x_3 = 5.9 \\ 0.96x_1 - 104.42x_2 3.69x_3 = 8.6 \\ 3.71x_1 - 7.47x_2 - 105.22x_3 = 9.4 \end{cases}$$

13. $\begin{cases}14.1x_1 - 3.2x_2 + 5.1x_3 + 5.8x_4 = 3.9\\ 6.6x_1 - 18.4x_2 + 8.2x_3 - 9.9x_4 = 7.2\\ 9.3x_1 - 7.6x_2 + 19.1x_3 - 3.8x_4 = 2.1\\ 7.6x_1 + 5.5x_2 + 4.2x_3 - 14.7x_4 = 9.1\end{cases}$ $\begin{cases}106.2x_1 + 5.29x_2 - 7.21x_3 = 5.9\\ 11.96x_1 - 104.42x_2 + 3.69x_3 = 0.6\\ 3.71x_1 - 7.47x_2 - 105.22x_3 = 9.4\end{cases}$

14. $\begin{cases}18.7x_1 - 0.3x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 0.4\\ 0.9x_1 + 11.4x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 = 1.2\\ 7.8x_1 + 1.6x_2 - 10.8x_3 + 0.7x_4 = 0.9\\ 6.2x_1 - 0.4x_2 - 0.2x_3 - 10.4x_4 = 0.5\end{cases}$ $\begin{cases}107.8x_1 + 5.6x_2 - 2.6x_3 = 8.12\\ 8.5x_1 + 106.9x_2 + 5.8x_3 = 2.5\\ 5.4x_1 + 0.6x_2 - 102.7x_3 = 5.13\end{cases}$

15. $\begin{cases}10.7x_1 - 0.3x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 0.4\\ 9.9x_1 + 10.4x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 = 1.2\\ 7.8x_1 + 1.6x_2 - 10.8x_3 + 0.7x_4 = 0.9\\ 6.2x_1 - 0.7x_2 + 0.2x_3 - 10.4x_4 = 1.5\end{cases}$ $\begin{cases}107.8x_1 + 5.6x_2 - 2.6x_3 = 8.12\\ 8.5x_1 + 106.9x_2 + 5.8x_3 = 2.5\\ 5.4x_1 + 0.6x_2 - 102.7x_3 = 5.13\end{cases}$

16. $\begin{cases}5.8x_1 + 2.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1\\ 0.3x_1 + 4.0x_2 + 1.2x_3 = -1.7\\ 1.7x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1\end{cases}$ $\begin{cases}5.8x_1 + 2.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1\\ 0.3x_1 + 4.0x_2 + 1.2x_3 = -1.7\\ 1.7x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1\end{cases}$

17. $\begin{cases}24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24\\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95\\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81\end{cases}$ $\begin{cases}24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24\\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95\\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81\end{cases}$

18. $\begin{cases}0.31x_1 + 0.14x_2 + 0.30x_3 + 0.27x_4 = 1.02\\ 0.26x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.00\\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34\\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 + 0.17x_4 = 1.27\end{cases}$ $\begin{cases}4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7\\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6\\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 4\end{cases}$

19. $\begin{cases}0.31x_1 + 0.15x_2 + 0.30x_3 + 0.37x_4 = 1.02\\ 0.27x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.10\\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.33x_4 = 1.04\\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.41x_3 + 0.17x_4 = 1.17\end{cases}$ $\begin{cases}7.7x_1 + 0.4x_2 - 2.1x_3 = 13.4\\ -5.5x_1 + 12.3x_2 - 0.6x_3 = 9.8\\ -2.6x_1 - 3.4x_2 + 11.1x_3 = 7.2\end{cases}$

20. $\begin{cases}2.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.172\\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115\\ 1.34x_1 + 1.87x_2 + 2.98x_3 + 0.64x_4 = 9.009\\ 0.88x_1 + 0.34x_2 + 0.46x_3 + 0.44x_4 = 9.349\end{cases}$ $\begin{cases}6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55\\ 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.55\\ 1.2x_1 + 1.5x_2 + 7.2x_3 = 16.82\end{cases}$

21. $\begin{cases}21.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1\\ 3.5x_1 - 12.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7\\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 13.7x_3 = 0.8\end{cases}$ $\begin{cases}4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8\\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9\\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20\end{cases}$

22. $\begin{cases}4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8\\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9\\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20\end{cases}$ $\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = -3\\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1\\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0\end{cases}$

23. $\begin{cases} 0.31x_1 + 0.15x_2 + 0.30x_3 + 0.37x_4 = 1.02 \\ 0.27x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.10 \\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.33x_4 = 1.04 \\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.41x_3 + 0.17x_4 = 1.17 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24 \\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$ $\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases}$ $\begin{cases} 7.7x_1 + 0.4x_2 - 2.1x_3 = 12.4 \\ -4.5x_1 + 12.3x_2 - 0.6x_3 = 8.8 \\ -2.6x_1 - 3.4x_2 + 11.1x_3 = 6.2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7.7x_1 + 0.4x_2 - 2.1x_3 = 12.4 \\ -4.5x_1 + 12.3x_2 - 0.6x_3 = 8.8 \\ -2.6x_1 - 3.4x_2 + 11.1x_3 = 6.2 \end{cases}$ $\begin{cases} 21.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 3.5x_1 - 12.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 13.7x_3 = 0.8 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 20.9x_1 + 1.2x_2 + 2.12x_3 + 0.9x_4 = 21.70 \\ 1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 27.46 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 = 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 = 49.72 \end{cases}$ $\begin{cases} 24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24 \\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.172 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 1.87x_2 + 2.98x_3 + 0.64x_4 = 9.009 \\ 0.88x_1 + 0.34x_2 + 0.46x_3 + 4.44x_4 = 9.349 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 0.31x_1 + 0.15x_2 + 0.30x_3 + 0.37x_4 = 1.02 \\ 0.27x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.10 \\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.33x_4 = 1.04 \\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.41x_3 + 0.17x_4 = 1.17 \end{cases}$ $\begin{cases} 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55 \\ 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.55 \\ 1.2x_1 + 1.5x_2 + 7.2x_3 = 16.80 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 20.9x_1 + 1.2x_2 + 1.12x_3 + 0.9x_4 = 21.70 \\ 1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 27.46 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 = 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 = 49.72 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

ГЛАВА 4. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

4.1 Интерполяция

Пусть функция $f(x)$ задана набором точек $(x_i\ , y_i)$ на интервале $[a, b]$:

$$y_i = f(x_i)\ , \quad i = 0,1, \dots, n\ , \quad \mathrm{a} \le x_i \le \mathrm{b}$$

Задача интерполяции – найти функцию $F(x)$, принимающую в точках x_i те же значения y_i. Тогда, условие интерполяции: $F(x) = y_i$

Такая функция $F(x)$ называется *интерполирующей функцией.*

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых. Точки x_i называют *узлами интерполяции*.

Задача нахождения интерполяционной функции $F(x)$ имеет много решений, так как через заданные точки x_i , y_i можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай интерполяции функции многочленами:

$$F(x) = P_n(x_1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ \ i = 0,1,.\,.,n$$

При этом искомый полином называется *интерполяционным полиномом*.

4.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,\ b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является *многочлен Лагранжа*:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \qquad (4.1)$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени n:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

Выражение (4.1) применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки x. Если функция $f(x)$ на отрезке $(x_0\ , x_n)$ определена и имеет непрерывные производные до (n+1)-го порядка включительно, то погрешность интерполяционной формулы в каждой точке этого отрезка оценивается неравенством: $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|P_{n+1}(x)|$ (4.3) где $M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$, $R_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n (n ≤ 20). При больших n погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом n).

Пример1: найти интерполяционный многочлен Лагранжа $P(x)$, для которого $P(-1) = 12$, $P(1) =$ - 3, $P(3) = 4$.

Решение*:* В данном случае x_0 = - 1, x_1 = 1, x_2 = 3, y_0 = 12, y_1 = - 3, y_2 = 4.

При n = 2 формула (4.1) принимает вид

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Подставляя в эту формулу заданные значения, находим

$$P_2(x) = 12 \frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)} - 3 \frac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)} + 4 \frac{(x+1)(x-1)}{(3+1)(3-1)} =$$

$$= 44x^2 - 120x + 28$$

Пример 2: найти интерполяционный многочлен Лагранжа 2-го порядка для функции y = cos(x) на отрезке [0, π⁄4], если заданы значения функции в трёх узлах интерполяции:

x	0	π⁄6	π⁄4
y = cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Таблица 4.1 функции в трёх узлах интерполяции

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближённое значение cos (π/12) и оценить погрешность результата вычислений.

Решение. В нашем случае x_0 = 0, x_1 = π ⁄ 6, x_2 = π ⁄ 4, y_0 = 1, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y(x) = Cos(x)$

1) Подставляя в многочлен Лагранжа для трёх узлов интерполяции заданные значения, находим интерполяционный многочлен Лагранжа 2-го порядка:

$$P_2(x) = 1\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(0-\frac{\pi}{6}\right)\left(0-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-0\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$\approx 0.4471x^2 - 0.022x + 1$$

2) При $x = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$ $\quad P_2\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}9636$

3) С помощью неравенства (4.3) оценим погрешность вычислений:

$$\left|cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - P_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \le \frac{M_3}{3!}\cdot\left|R_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|,$$

где $R_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (\frac{\pi}{12} - 0)\,(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6})\,(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\pi}{12})^3$

Так как y = cos x, y′ = - sin x, y″ = - cos x, y‴ = sin x, то

$$M_3 = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}}|f'''(x)| = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}}|Sin(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

Следовательно, $\left|cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - P_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \le \frac{0{,}707}{3!}\cdot\left|2\left(\frac{\pi}{12}\right)^3\right| \approx 0{,}004229$

Таким образом, cos (π/12) ≈ 0.9636 ± 0.0042.

Построив графики функций y = P_2(x) и y = cos(x) на отрезке [0, π ⁄ 4], можно убедится, что они совпадают, следовательно решение выполнено верно.

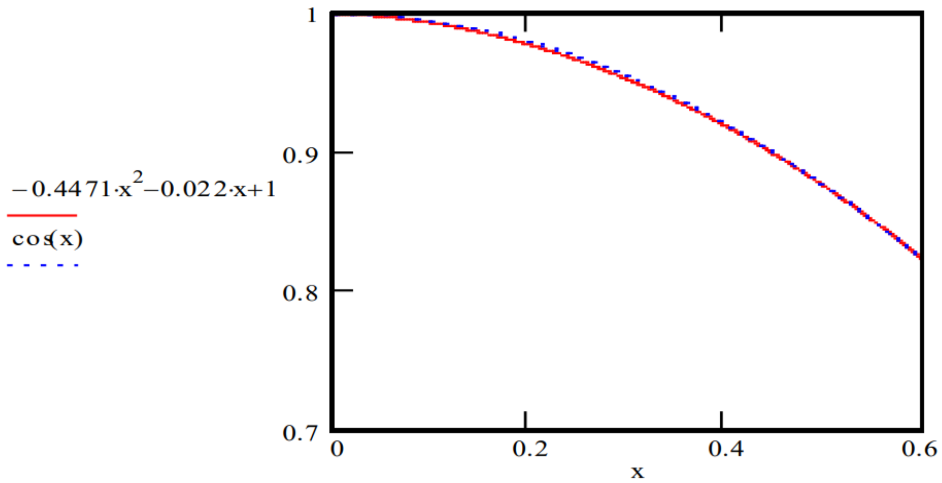


Рис.5.1. Графики функций y = P_2(x) и y = cos(x), выполненные в системе MathCAD.

Конечные разности

Рассмотрим значения функции $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad ..., \quad y_n = f(x_n).$$

Выделим всевозможные пары соседних значений функции, в каждом случае вычтем предыдущее значение из последующего, получим разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots,\ \Delta y_{n-1} = y_{n-1} - y_n \qquad (4.4)$$

Они называются конечными *разностями первого порядка или просто первыми разностями* и обозначаются: $\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n-1}$ соответственно. То есть $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\quad (i = 0, 1, ..., n\text{-}1)$

Разностями второго порядка или вторыми разностями называют разности первых разностей и обозначают:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Или же $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$, $\quad (i = 0, 1, ..., n\text{-}1)$

Разностями третьего порядка или третьими разностями называют разности вторых разностей и обозначают:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\ \Delta^3 y_1 &= \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \\ \Delta^3 y_{n-1} &= \Delta^2 y_n - \Delta^2 y_{n-1} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Или же $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$, $\quad (i = 0, 1, ..., n\text{-}1)$

Аналогично определяются последующие разности. Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Для разностей первого порядка это следует из определения.

Для разностей второго порядка имеем

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

Аналогично для разностей третьего порядка

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i &= (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} + y_i \end{aligned}$$

Таблица разностей различных порядков строится согласно схеме1. Каждое число этой таблицы (начиная с третьего столбца) является разностью двух смежных чисел столбца слева (из нижнего числа вычитается верхнее; разность записывается в следующем столбце между этими числами). Третий столбец содержит первые разности, четвёртый - вторые и т.д.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…	
x_3	y_3	Δy_3	…		
x_4	y_4	…			
…	…				

Таблица 4.2 схема построения разделённой разности n-ого порядка

Для контроля вычислений при составлении таблицы разностей пользуются следующим утверждением: сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца. Например,

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{n+1} - y_n) = y_{n+1} - y_0$$

Обычно все разности в таблице записывают целыми числами или в единицах младшего разряда значений функции.

Заметим, что конечные разности n-го порядка от многочлена степени n постоянны, а конечные разности $(n + 1)$-го порядка равны нулю. Это свойство даёт простой способ составления таблиц. Непосредственно вычисляем значения многочлена для n+ 1 значений аргумента и составляем таблицу, в которую входят разности до n-го порядка включительно. Далее, пользуясь тем, что разности n-го порядка постоянны, продолжаем столбец разностей (n - 1)-го порядка. Для получения новых чисел этого столбца складываем соответствующие разности (n - 1)-го порядка с разностями n-го порядка. Затем последовательно продолжаем столбцы разностей (n - 2) -го, (n - 3)-го порядков и т.д., пока не получим продолжение столбца $y_i = f(x_i)$, т.е. значений многочлена.

Пример: составить таблицу конечных разностей для следующих значений x и $y = f(x)$: $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $y_0 = 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 4$.

Решение*:* По формулам (4.4) найдём первые разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 1 - 4 = -3$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0 - 1 = -1$$

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = 1 - 0 = 1$$
$$\Delta y_3 = y_3 - y_2 = 4 - 1 = 3$$

По формулам (4.5) получим вторые разности:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -1 + 3 = 2$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 3 - 1 = 2$$

По формулам (4.6) найдём третьи разности:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 2 - 2 = 0$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 2 - 2 = 0$$

Конечная разность четвёртого порядка:

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0 = 0 - 0 = 0$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2 -1 0 1 2	4 1 0 1 4	-3 -1 1 3	2 2 2	0 0	0
$\sum$		0	6	0	0
S	0	6	0		

Таблица 4.3 представление разделённой разности четвёртого порядка

Две последние строки записаны для контроля вычислений: в строке $\sum$ числа равны суммам чисел, стоящих в соответствующем столбце, в строке S - разности последнего и первого чисел соответствующего столбца. Совпадение этих чисел по диагонали означает, что вычисления проведены верно.

Разделенные разности

Разделённая разность - обобщение понятия производной для дискретного набора точек.

По определению, разделенной разностью 0-го порядка называются значения функции $f(x_1) \dots f(x_n)$

Разделенная разность 1-го порядка имеет вид: $f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Разделённые разности второго порядка получаются из разделённых разностей первого порядка по формулам:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}; \; f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}$$

Аналогично определяются разделённые разности третьего порядка:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - F(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}$$

Разделённые разности n-го порядка получаются из разделённых разностей (n - 1)-го порядка по формуле

$$f(x_n, x_{n-1}, .., x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, .., x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, .., x_0)}{x_n - x_0}$$

В случае равноотстоящих узлов с шагом h разделённые разности различных порядков имеют вид:

$$f(x_n, x_{n-1}) = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}; \qquad f(x_n, x_{n-1}, .., x_0) = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}$$

Пример: составить таблицу конечных разностей для следующих значений x и $y = f(x)$:

$x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$,

$y_0 = -9$, $y_1 = -16$, $y_2 = -3$, $y_3 = 11$, $y_4 = 36$.

Решение: найдём первые разделенные разности:

$f(x_1, x_0) = -7; \quad f(x_2, x_1) = 13; \quad f(x_3, x_2) = 7; \quad f(x_4, x_3) = 25;$

После получим разделенные разности второго порядка:

$$f(x_2, x_1, x_0) = 10; \qquad f(x_3, x_2, x_1) = -2; \qquad f(x_4, x_3, x_2) = 6;$$

Найдём третьи разности:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = -3; \qquad f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 2;$$

И наконец разделённая разность четвёртого порядка:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = 1;$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-3 -2 -1 1 2	-9 -16 -3 11 36	-7 13 7 25	10 -2 6	-3 2	1

Таблица 4.4 представление разделённой разности четвёртого порядка

4.3 Многочлен Ньютона

Ещё одна форма записи интерполяционного многочлена – интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями.

Определение *Интерполяционным многочленом Ньютона* называется многочлен

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)f(x - x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \cdots +$$
$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots x_n) \qquad (4.7)$$

в котором $f(x - x_0), f(x_0, x_1, x_2), \dots \; f(x_0, x_1, \dots x_n)$ - разделённые разности различных порядков.

В силу единственности интерполяционного многочлена n-й степени интерполяционный многочлен Ньютона перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный многочлен Лагранжа и обратно.

Определение *Интерполяционной формулой Ньютона* называется формула

$$f(x) \approx P_n(x) \qquad (4.8)$$

В случае равноотстоящих узлов интерполяции

$$x_1 = x_0 + h\,, \quad x_2 = x_0 + 2h\,, \dots \quad x_n = x_0 + nh$$

из формулы (4.8) с учётом равенств (4.7) получается *первая интерполяционная формула Ньютона*

$$f(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда значение $\frac{x-x_0}{h}$ мало по абсолютной величине.

Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для *интерполирования вперёд*. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу Ньютона становится невыгодно. В этом случае применяется *формула для интерполирования назад* - *вторая интерполяционная формула Ньютона*

$$f(x) \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\, h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

За точностью расчета можно следить по убыванию членов суммы (4.7). Если функция достаточно гладкая, то справедливо приближенное равенство $f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$. Это приближенное равенство можно использовать для практической оценки погрешности интерполяции: $\varepsilon_n = |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$.

Пример: найти интерполяционный многочлен Ньютона P1(x) для функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x	0	1	2	3
y	6	0	-10	-30

Решение: определим переменные с системе MathCAD: $x1$:=0 $y0$:= 6 $x1$:=1 $y1$:=0 …

1) Найдем коэффициенты $b0$, $b1$,$b2$, b3:

$b0 := y0 \qquad b0 = 6$

$y1 = b0 + b1(x1 - x0) \rightarrow 0 = 6 + b1$

$0 = 6 + b1 \qquad b1 := -6$

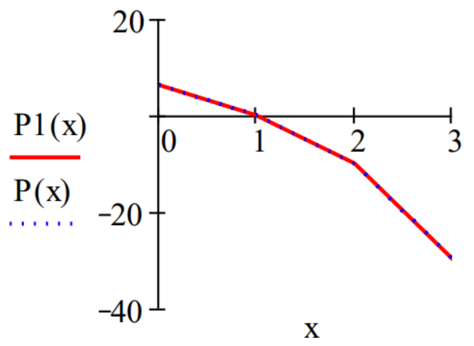
$$y2 = b0 + b1(x2 - x0) + b2(x2 - x0)(x2 - x1) \rightarrow -10 = -6 + 2b2$$
$$-10 = -6 + 2b2 \qquad b2 := -2$$

$$y3 = b0 + b1(x3 - x0) + b2(x3 - x0)(x3 - x1) + b3(x3 - x0)(x3 - x1)(x3 - x2) \rightarrow -30 = -24 + 6b3$$
$$-30 = -24 + 6b3 \qquad b3 := -1$$

2) Построим многочлен Ньютона

$$P1(x) := b0 + b1\,(x - x0) + b2(x - x0)(x - x1) + b3(x - x0)(x - x1)(x - x2)\,simplify \rightarrow -x^3 + x^2 - 6x + 6$$

Построив графики функций, для многочлена Ньютона $P1(x)$ и многочлена Лагранжа $P(x)$ для данных узлов мы увидим, что они совпадают.



Вопросы для самоконтроля для самоконтроля

1. Что называется интерполяцией? Сформулируйте задачу интерполирования функции.
2. Что называется интерполяционным многочленом Лагранжа? Как он находится?
3. Что называется интерполяционным многочленом Ньютона? Как он находится?
4. Как оценить погрешность вычислений?
5. В чем преимущества сплайн-интерполяции по сравнению с интерполяционными полиномами?
6. Какая функция MathCAD реализует линейную интерполяцию?
7. Какие функции кубической сплайн-интерполяции вам известны, охарактеризуйте последовательность из использования?

Лабораторная работа к главе 4

Интерполирование функций

Цель работы: изучить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, научиться строить их.

Задание 1. Найти интерполяционный многочлен Ньютона P(x) для функции $f(x) = \frac{2^{x-1}}{n}$ где n - номер варианта, по её значениям в точках:

$x_0 = -1$ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ $x_4 = 3$

Вычислить значения P(-0.5), P(-0.21), P(1.29), P(2.56). Оценить погрешность вычислений.

Задание 2. Для функции f (x) найти интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка, выбрав систему трёх равномерно расположенных на отрезке [a, b] узлов. Оценить погрешность интерполяции в точке ξ.

Вариант	$f(x)$	$a \le x \le b$	ξ
1	$\cos x^2$	$0 \le x \le \pi / 4$	$\pi/12$
2	$x\sin x$	$0 \le x \le \pi /4$	$\pi/10$
3	$x\cos x$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/14$
4	$\sin x^2$	$0 \le x \le \pi /8$	$\pi/12$
5	$\cos(3x)^2$	$0 \le x \le \pi /2$	$\pi/12$
6	$2x\sin(x / 2)$	$0 \le x \le \pi /4$	$\pi/9$
7	$3x\cos(x / 3)$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/10$
8	e^{x^2}	$0 \le x \le 0{,}6$	0,3
9	$\sin 4x$	$0 \le x \le \pi / 4$	$\pi/32$
10	e^{-3x}	$0 \le x \le 0{,}4$	0,1
11	$\cos 3x$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/8$
12	$tg 2x$	$-\pi / 6 \le x \le \pi /6$	$\pi/7$

13	$sin(2x)^2$	$0 \le x \le \pi /8$	$\pi/_{12}$
14	e^{-x^2}	$0 \le x \le 0{,}4$	0,2
15	$tg\, x^2$	$-\pi / 3 \le x \le \pi /3$	$\pi/_{5}$
16	e^{x^2}	$0 \le x \le 1$	0,5
17	$sin\, 4x$	$0 \le x \le \pi / 2$	$\pi/_{30}$
18	e^{-3x}	$0 \le x \le 0{,}5$	0,2
19	$cos\, 3x$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/_{10}$
20	$tg2x$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/_{8}$
21	e^{x^2}	$0 \le x \le 0{,}6$	0,6
22	$xcos\, x$	$0 \le x \le \pi /8$	$\pi/_{15}$
23	$sin\, x^2$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/_{14}$
24	$cos(3x)^2$	$0 \le x \le \pi /2$	$\pi/_{18}$
25	$2x\, sin(x / 2)$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/_{10}$
26	$3x\, cos(x / 3)$	$0 \le x \le \pi /4$	$\pi/_{11}$
27	e^{x^4}	$0 \le x \le \pi /2$	$\pi/_{4}$
28	$cos\, x^2$	$0 \le x \le \pi / 6$	$\pi/_{15}$
29	$xsin\, x$	$0 \le x \le \pi /6$	$\pi/_{12}$
30	$xcos\, x$	$0 \le x \le \pi /3$	$\pi/_{10}$

ГЛАВА 5. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

5.1. Задача аппроксимации

Аппроксимация – это определение параметров аналитической функции, описывающей набор точек, полученных в результате эксперимента.

Предположим, имеется набор из n точек (x_i, y_i), полученных в результате эксперимента, и необходимо аппроксимировать (описать) эти данные некоторой функцией $f(x)$. Если исходные данные были получены с высокой точностью и количество точек не очень большое, то можно аппроксимировать данные функцией, которая проходит через все узловые точки. На практике экспериментально полученные данные всегда обладают погрешностью, часто довольно значительной, тогда при аппроксимации можно провести кривую таким образом, чтобы ее отклонение от всех точек было минимальным, но при этом она не обязательно будет проходить через каждую точку (рис.5.2). Такая аппроксимация сгладит погрешность первоначальных данных.

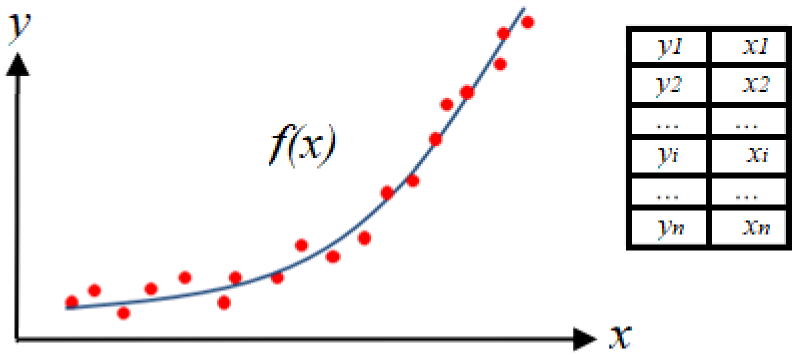


Рис.5.2. Задача аппроксимации

Представим аппроксимирующую функцию в виде суммы произведений коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_m$ и базисных функций $g_0, g_1, \ldots, g_m$:

$$f(x_i) = c_0 \cdot g_0(x_i) + c_1 \cdot g_1(x_i) + \ldots + c_m \cdot g_m(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Выбор базисных функций, то есть зависимости, которой можно описать реальные данные – это отдельная задача, часто решаемая методом проб и последовательных приближений. В этом случае исходные данные, представленные в графической форме (семейства точек или кривые), сопоставляются с семейством графиков ряда типовых функций, используемых обычно для целей аппроксимации. Однако во многих случаях базисная функция известна, и требуется только найти ее коэффициенты.

Во многих случаях в качестве базисной функции выбирают степенной полином:

$$f(x_i) = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

5.2. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента получена таблица значений x и y

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Таблица 5.1 таблица значений x и y

Требуется найти функцию вида $y = F(x)$, которая в точках $x_1, x_2, \dots x_n$ принимает значения, наиболее близкие к табличным значениям $y_1, y_2, \dots y_n$. Такую формулу называют *эмпирической формулой* или *уравнением регрессии y* на x, а саму функцию называют *приближающей* или *аппроксимирующей функцией.*

На практике эту аппроксимирующую функцию $F(x)$ находят следующим образом. По таблице строят точечный график функции f, по которому устанавливают вид приближающей функции из числа известных:

- Линейная регрессия
- Квадратичная регрессия
- Геометрическая регрессия
- Тригонометрическая функция
- Логарифмическая функция
- Дробно-линейная функция

Если вид приближающей функции установлен, то задача сводится к отысканию значений параметров. Их можно вычислить по методу наименьших квадратов, суть которого заключается в следующем.

Пусть требуется найти аппроксимирующую функцию, например с тремя параметрами: $y = F(x, a, b, c)$

Для X_i (где $i = 1, 2, \dots, n$) из таблицы эта функция примет значения $\overline{y_i} = F(x_i, a, b, c)$

которые должны как можно меньше отличаться от заданных (табличных) значений y_i, т.е. разность $\overline{y_i} - y_i$должна быть близка к нулю. Поэтому сумма квадратов разностей соответствующих значений функций f (x) и F(x)

$$\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - F(x_i, a, b, c)\big)^2 = \Phi(a, b, c)$$

также должна принимать минимальное значение.

Таким образом, задачу свели к отысканию минимума функции $\Phi(a, b, c)$. Используем необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - F(x_i, a, b, c)\big) * F'_a(x_i, a, b, c) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - F(x_i, a, b, c)\big) * F'_b(x_i, a, b, c) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - F(x_i, a, b, c)\big) * F'_c(x_i, a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему из трёх уравнений с тремя неизвестными, получим значения параметров a, b и c - следовательно, получим конкретный вид приближающей функции $F(x, a, b, c)$.

Очевидно, что значения найденной функции $F(x, a, b, c)$ в точках $x_1, x_{2,\ldots}, x_n$ будут отличаться от табличных значений $y_1, y_{2,\cdots}, y_n$.

Значения разностей $\varepsilon_i = y_i - F(xi\,, a, b, c)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, называются отклонениями данных значений у от вычисленных. Сумма квадратов отклонений $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ должна быть наименьшей. Отметим, что из нескольких приближений для одной и той же табличной функции лучшим является то, для которого σ имеет наименьшее значение

5.2.1. Линейная регрессия

Пусть требуется найти приближающую функцию в виде линейной

$$F(x, a, b) = ax + b$$

Так как её частные производные по параметрам a и b: $F'_a(x, a, b) = x$, $F'_b(x, a, b) = 1$, то система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

После несложных преобразований её можно привести к виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b \end{cases}$$

В пакете MathCAD решать систему уравнений удобнее в матричном виде. Так, в случае линейной регрессии параметры a и b легко найти из матричного уравнения.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

5.2.2. Квадратичная регрессия

Пусть требуется найти приближающую функцию в виде квадратичной

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

Так как её частные производные по параметрам a, b и c соответственно равны:

$$F_a'(x, a, b, c) = x^2$$
$$F_b'(x, a, b, c) = x$$
$$F_c'(x, a, b, c) = 1$$

то система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)1 = 0 \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, параметры a, b, c легко находятся из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^1 & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

5.2.3. Тригонометрическая функция

Пусть требуется найти приближающую функцию в виде тригонометрической $F(x, a, b) \ = a + b \cdot sin\, x$.

Поскольку её частные производные по параметрам a и b равны:

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) = 1$$
$$\mathrm{F}'_{\mathrm{b}}(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) = \sin \mathrm{x}$$

то система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\ sinx_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\ sinx_i)\ sinx_i = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = na + b \sum_{i=1}^{n} sin\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\, sin\, x_i = a \sum_{i=1}^{n} sin\, x_i + b \sum_{i=1}^{n} sin^2 x_i \end{cases}$$

Решение системы матричным способом, на MathCAD уравнение для вычисления параметров a и b будет следующим:

$$\binom{a}{b} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} sin\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} sin\, x_i & \sum_{i=\rho}^{n} sin^2 x_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\, sin\, x_i \end{pmatrix}$$

5.2.4. Логарифмическая функция

Пусть требуется найти приближающую функцию в виде тригонометрической $F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b$

Поскольку её частные производные по параметрам a и b равны:

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) = \ln \mathrm{x}$$
$$\mathrm{F}'_{\mathrm{b}}(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) = 1$$

то система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \ln x_i - b) x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \ln x_i - b)\, 1 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = nb + a \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\, ln\, x_i = b \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i + a \sum_{i=1}^{n} ln^2\, x_i \end{cases}$$

Решение системы матричным способом, на MathCAD уравнение для вычисления параметров a и b будет следующим:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} ln^2\, x_i & \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

5.2.5. Дробно-линейная функция

Пусть требуется найти приближающую функцию в виде тригонометрической $F(x,a,b)\ =\frac{x}{ax+b}$

Поэтому дальнейшее решение поставленной задачи будет аналогично первому случаю – случаю линейной регрессии.

Так как $\frac{1}{F(x,a,b)}=\frac{ax+b}{x}=a+\frac{b}{x}$ то, заменив в исходной таблице значения x и y их обратными величинами $u\ =\ 1/x,\quad z\ =\ \Phi\,(u,a,b)=\ 1/y\ =\ 1/\,F\,(x,a,b)$, можно свести задачу к нахождению параметров линейной функции, зависящей от u: $\Phi\ (u,a,b)\ =\ a\ +\ bu$

Так как частные производные функции $\Phi\,(u,a,b)$ по параметрам a и b: $\phi_b'=n\quad\phi_a'=1$,

то система примет вид:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}u_iz_i=b\sum_{i=1}^{n}u_i^2+a\sum_{i=1}^{n}u_i\\ \sum_{i=1}^{n}z_i=b\sum_{i=1}^{n}u_i+an\end{cases}$$

Решив систему, получим значения параметров a и b дробно-линейной функции $F(x,a,b)\ =\frac{x}{ax+b}$

Решение системы матричным способом, на MathCAD уравнение для вычисления параметров a и b будет следующим:

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)\\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right) & n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)\left(\frac{1}{y_i}\right)\\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i}\right)\end{pmatrix}$$

Мы рассмотрели частные случаи нахождения эмпирических формул в виде линейной, квадратичной, степенной, тригонометрической, логарифмической и дробно-линейной функций, параметры других элементарных функций вычисляются аналогично.

Пример: По заданной таблице значений переменных постройте с помощью метода наименьших квадратов различные эмпирические формулы, сравните качество полученных приближений и выберите из них наилучшее.

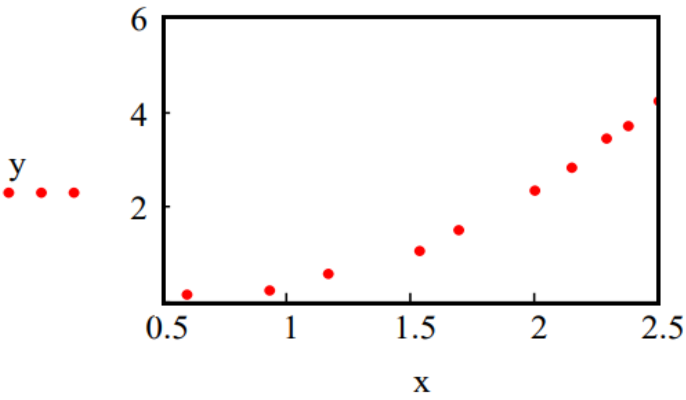
x	0.6	0.93	1.17	1.54	1.7	2.0	2.15	2.29	2.38	2.5
y	0.11	0.22	0.54	1.04	1.46	2.3	2.8	3.4	3.7	4.2

Таблица 5.2 таблице значений переменных.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

1) Для начала установим исходные значения x, y и построим точечный график:

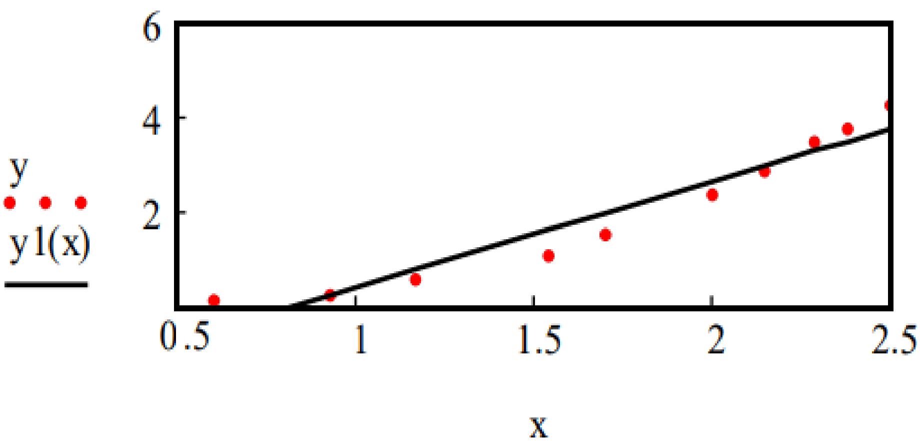
$$x := \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.93 \\ 1.17 \\ 1.54 \\ 1.70 \\ 2.00 \\ 2.15 \\ 2.29 \\ 2.38 \\ 2.50 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.22 \\ 0.54 \\ 1.04 \\ 1.46 \\ 2.30 \\ 2.80 \\ 3.40 \\ 3.70 \\ 4.20 \end{pmatrix}$$



Далее найдем параметры линейной регрессии и построим исходный график и линейный график:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & \sum x \\ \sum x & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} xy \\ \sum y \end{pmatrix}$$

$$a = 2.23 \quad b = -1.872 \quad y1(x) := ax + b$$



Сравним исходные значения и значения линейной функции при заданных значениях аргумента

x =

	0
0	0.6
1	0.93
2	1.17
3	1.54
4	1.7
5	2
6	2.15
7	2.29
8	2.38
9	2.5

y =

	0
0	0.11
1	0.22
2	0.54
3	1.04
4	1.46
5	2.3
6	2.8
7	3.4
8	3.7
9	4.2

y1(x) =

	0
0	-0.534
1	0.202
2	0.737
3	1.562
4	1.919
5	2.588
6	2.922
7	3.235
8	3.435
9	3.703

y-y1(x) =

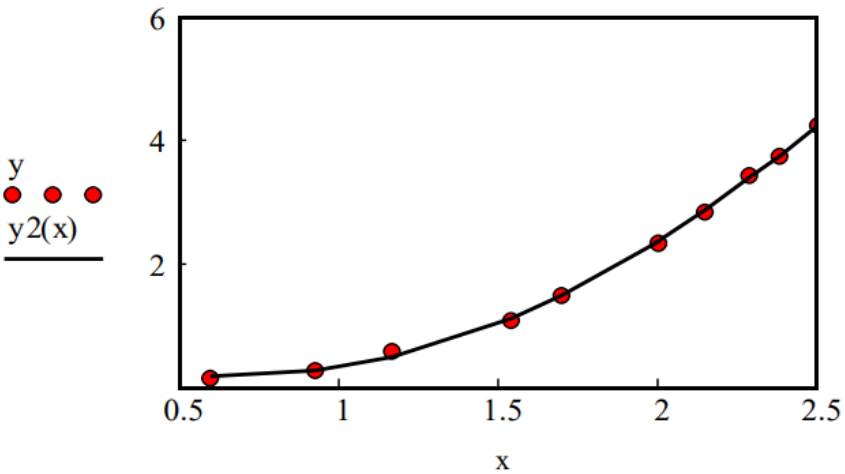
	0
0	0.644
1	0.018
2	-0.197
3	-0.522
4	-0.459
5	-0.288
6	-0.122
7	0.165
8	0.265
9	0.497

Найдем погрешность первого приближения (остаточную дисперсию)

$$i := 0..9 \qquad \varepsilon_1 := \left[\sum_i \left(y_i - y1(x_i)\right)^2\right]\cdot\frac{1}{10} \qquad \varepsilon_1 = 0.138$$

2) Найдем параметры квадратичной регрессии и построим исходный график и квадратичной график:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^1 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^1 & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_i y_i x_i^2 \\ \sum_i y_i x_i^1 \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}$$



$$a = 1.17 \quad b = -1.477 \quad y2(x) := ax^2 + bx + c$$

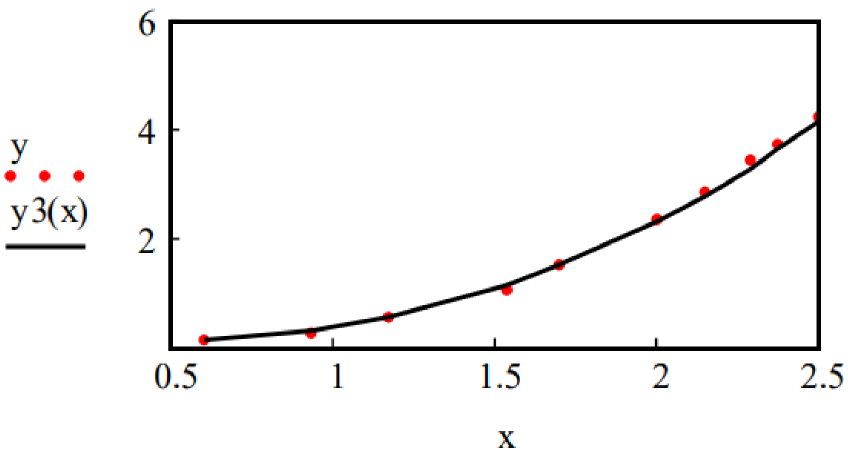
Найдем погрешность первого приближения (остаточную дисперсию)

$$i := 0..9 \qquad \varepsilon_2 := \left[\sum_i \left(y_i - y2(x_i)\right)^2\right] \cdot \frac{1}{10} \qquad \varepsilon_2 = 1.275 \cdot 10^{-3}$$

3) Найдем параметры степенной регрессии и построим исходный график и степенной график:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i (\ln x_i)^2 & \sum_i \ln x_i \\ \sum_i \ln x_i & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_i \ln y_i \ln x_i \\ \sum_i \ln y_i \end{pmatrix}$$

$$a = 2.679 \qquad b = -1.043 \qquad n := e^b \qquad y3(x) := n * x^a$$



Найдем погрешность первого приближения (остаточную дисперсию)

$$i := 0..9 \qquad \varepsilon_3 := \left[\sum_i \left(y_i - y3(x_i)\right)^2\right] \cdot \frac{1}{10} \qquad \varepsilon_3 = 6.229 \cdot 10^{-3}$$

4) Сравним погрешности трех найденных приближений

$$\varepsilon_1 = 0.138 \qquad \varepsilon_2 = 1.275 \cdot 10^{-3} \qquad \varepsilon_3 = 6.229 \cdot 10^{-3}$$

Вывод: наиболее подходящей приближающей функцией является квадратичная.

Лабораторная работа к главе 5

Нахождение эмпирических формул по методу наименьших квадратов

Цель: изучить метод наименьших квадратов, построить различные эмпирические формулы.

Задание. По заданной таблице значений переменных постройте с помощью метода наименьших квадратов различные эмпирические формулы, сравните качество полученных приближений и выберите из них наилучшее.

Вариант 1										
x	0,7	0,93	1,17	1,54	1,7	2	2,15	2,29	2,38	2,5
y	0,19	0,32	0,64	1,04	1,46	2,54	3,01	3,74	4,2	4,96

Вариант 2										
x	4,36	3,4	2,95	2,96	2,12	1,96	1,06	0,96	0,76	0,16
y	6,23	10,9	13,9	18,31	21,9	24,2	32,2	34,2	36,6	49,5

Вариант 3										
x	2,21	3,82	4,43	5,34	5,84	6,19	6,29	7	8	9
y	52,4	58,6	60,7	67,31	70,5	73,3	75,3	80,1	91,5	105

Вариант 4										
x	2,44	2,51	2,6	2,62	2,69	2,95	2,98	3,01	3,2	3,37
y	10,3	10,4	11,84	11,9	12,5	13,4	14,74	15,7	16,2	17,7

Вариант 5										
x	51,7	52,8	55,7	58,9	61,1	67,7	70,4	72,2	85,1	105
y	8,74	8,77	8,81	8,9	8,98	9,11	9,14	9,22	9,31	9,35

Вариант 6										
x	3,78	3,87	4	4,23	4,33	4,59	4,87	5,14	5,59	5,61
y	65,7	62,05	59,7	58,1	56,8	51,8	50,8	49,7	45,8	44,5

Вариант 7										
x	7,46	7,27	7,03	6,4	6,16	5,88	5,61	5,39	5,15	4,8
y	110	100,1	96,6	87,8	87,4	84,7	82,7	82	80,9	79,7

Вариант 8										
x	4,65	4,86	4,96	5,49	5,58	5,91	6,04	6,13	6,15	6,33
y	92,5	91,52	90,1	79,3	75,3	70,5	68,3	62,6	58,5	57,4

Вариант 9										
x	4,97	4,89	4,14	3,92	3,43	3,06	2,74	2,31	1,52	1
y	30,5	28,4	27,9	25,9	24,3	22,8	22,8	15,7	14,4	8,7

Вариант 10										
x	8,66	8,32	7,97	7,31	7,2	7,08	7,03	6,98	6,82	6,41
y	33,6	32,42	30,9	25,9	24,9	22,8	22,8	19,7	16,4	5,78

Вариант 11										
x	8,6	8,31	6,97	7,31	7	7,01	7,5	6,9	6,03	6,01
y	30,6	31,42	31,99	24,96	24,2	21,1	20,91	18,9	17	5,28

Вариант 12										
x	4,9	4,89	4,4	3,2	3,43	4,08	2,4	2,3	1,5	1
y	30,5	28,2	27,9	25,6	24,5	21,9	22,1	15,7	14,5	9,7

Вариант 13										
x	7,6	7,2	7,01	624	6,16	5,8	4,61	5,39	5,15	4,8
y	109	100,6	96,9	87,3	87,4	83,7	81,7	82	80,9	79,7

Вариант 14										
x	4,6	3	2,95	2,6	2,1	1,96	1,6	0,96	0,76	0,16
y	6,2	10,9	13,1	18,81	20,9	24,1	32,2	33	36,6	40,5

Вариант 15										
x	3,36	4,4	2,5	2,6	2,2	1,6	2,06	0,96	0,86	0,16
y	8,23	10,9	12,9	17,31	22,9	24,1	31,2	33	37,6	47,5

Вариант 16										
x	–1,06	–0,83	–0,68	–0,31	–0,12	0,0	0,115	0,5	0,52	0,7
y	1,22	0,854	0,513	0,271	0,217	0,19	0,218	0,27	0,46	0,6

Вариант 17										
x	–2,15	–1,83	–1,62	–1,45	–1,01	–0,72	–0,48	0	0,54	0,68
y	–2,23	–2,65	–3,1	–3,54	–4,26	–4,38	–4,52	–4,27	–4,3	–4,01

Вариант 18										
x	–0,21	–0,14	–0,09	–0,032	0,114	0,18	0,257	0,38	0,53	0,68
y	–12,6	–11,	–10,2	–9,32	–9,25	–10,0	–11,5	–14,4	-15,3	–14,5

Вариант 19										
x	0,22	0,441	0,638	0,865	1,05	1,3	1,55	1,82	2,12	2,53
y	5,82	4,63	4,1	3,34	3	3,29	4,32	5,72	9,32	11,7

Вариант 20										
x	–1,0	–0,96	–0,86	–0,79	0,22	0,5	0,93	1,1	1,22	1,42
y	–1,00	–0,15	0,894	0,986	0,895	0,5	–0,31	–0,5	-0,7	-0,93

Вариант21										
x	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
y	0,19	0,273	0,341	0,394	0,433	0,46	0,477	0,49	0,51	0,53

Вариант 22										
x	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2
y	–0,24	–0,24	–0,16	0	0,24	0,56	0,96	1,44	1,96	2,35

Вариант 23										
x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,7	0,75	0,78	0,81	0,85	0,89
y	1,64	1,73	1,88	2,03	2,23	2,36	2,41	2,78	3,02	3,11

Вариант 24										
x	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
y	800	718	665	621	586	556	532	510	486	473

Вариант 25										
x	–2,0	3	4,5	12	15	18,5	20	23	24,5	27
y	–17,0	–3,0	1,2	1,8	3	4,5	7	9,1	11,5	13,8

Вариант 26										
x	–2,3	0	1,1	4,8	7,3	9,2	11,4	13	14,8	16,3
y	–12,5	8,6	13,4	15,1	21,4	24,2	28,3	32,1	36,5	39,1

Вариант 27										
x	2,34	5,16	7,03	8,42	9,61	10,1	11,35	12,1	13,2	14,7
y	15,2	25,03	32,18	37,11	44,82	51,6	50,13	73,2	68,1	85,6

Вариант 28										
x	–0,2	–0,14	–0,1	–0,03	0,1	0,2	0,26	0,38	0,47	0,54

y	-12,6	–11	–10,2	–9,3	–9,25	–10	–11,5	-14,4	-17,2	-21,9

Вариант 29 ***x***	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	1,75
y	19,2	27,3	34,1	39,4	43,3	45,9	47,7	48,7	51	45,9

Вариант 30 ***x***	0,43	0,48	0,55	0,62	0,7	0,75	0,78	0,81	0,86	0,9
y	2,78	2,41	2,36	2,23	2,03	1,88	1,73	1,64	1,44	1,27

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Классификация методов

Ставится задача вычислить определенный интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция на интервале [a, b].

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается вычислить непосредственно с помощью неопределенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции $f(x)$ не позволяет аналитически выразить первообразную $F(x)$ через элементарные функции;

2) подынтегральная функция $f(x)$ задана таблично.

В этих случаях используют приближенные, методы интегрирования.

Сущность большинства приближенных методов вычисления определенных интегралов состоит в замене подынтегральной функции $f(x)$ аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$, для которой можно легко записать первообразную в элементарных функциях, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + R, \qquad (2)$$

где R – погрешность вычисления интеграла.

С целью уменьшения погрешности, связанной с аппроксимацией подынтегральной функции, интервал интегрирования [a, b] разбивают на n отрезков и на каждом частичном отрезке заменяют подынтегральную функцию аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$. Тогда приближенное значение интеграла определяется суммой частичных интегралов от функций $\varphi_i(x)$, взятых в пределах от x_{i-1} до x_i:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)\,dx. \qquad (3)$$

Используемые на практике методы численного интегрирования можно сгруппировать в зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции.

Методы Ньютона-Котеса основаны на полиномиальной аппроксимации (интерполяции) подынтегральной функции. Методы этого класса отличаются друг от друга степенью используемого полинома, от которого зависит количество узлов, где необходимо вычислять функцию. В методах Ньютона-Котеса отрезок интегрирования разбивается, как правило, на отрезки равной длины, величина которых определяется как $h = \frac{(b-a)}{n}$ и называется *шагом интегрирования*. Алгоритмы этих методов просты и легко поддаются программной реализации.

Сплайновые методы базируются на аппроксимации подынтегральной функции сплайнами. Методы различаются по типу выбранных сплайнов. Такие методы имеет смысл использовать в задачах, где алгоритмы сплайновой аппроксимации применяются для обработки данных.

В *методах наивысшей алгебраической точности* используют не равноотстоящие узлы, расположенные так, чтобы обеспечить минимальную погрешность интегрирования при заданном количестве узлов. Методы различаются способом выбора узлов. Наиболее широкое применение получили *методы Гаусса*, в которых 121 узлы интегрирования выбираются как корни полиномов Лежандра.

В *методах Монте-Карло* узлы выбираются с помощью генератора случайных чисел, результат в итоге носит вероятностный характер. Методы оказываются особенно эффективны при вычислении кратных интегралов.

Независимо от выбранного метода в процессе численного интегрирования необходимо вычислить приближенное значение интеграла и оценить погрешность R.

Погрешность, возникающая при численном интегрировании, также как и при численном дифференцировании, имеет два основных источника. Первым источником погрешности является приближенная замена подынтегральной функции аппроксимирующей функцией – погрешность аппроксимации.

Как будет показано ниже, погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением количества отрезков разбиения интервала интегрирования n за счет более точной аппроксимации подынтегральной функции. Другой источник погрешности – неточности в вычислении подынтегральной функции в узловых точках и ошибки округления. Эта погрешность возрастает с ростом n и с некоторого значения $n*$ начинает преобладать над погрешностью аппроксимации.

Это обстоятельство должно предостеречь от выбора чрезмерно большого числа n.

6.1 Интерполяционные методы Ньютона-Котеса.

Способ получения формул для вычисления приближенного значения интеграла в методах Ньютона-Котеса состоит в следующем.

Разобьем интервал интегрирования [a, b] на n элементарных отрезков. Точки разбиения $a = x_0, x_1 \dots x_n = b$ будем называть узлами *интегрирования*, а расстояния между узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$ –*шагами интегрирования*. В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным $h = \frac{(b-a)}{n}$.

6.1.1 Методы прямоугольников

Рассмотрим сначала простейшие методы из класса методов Ньютона-Котеса. Использование метода прямоугольников предполагает замену подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ – полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке.

В качестве этой точки обычно выбирают середину частичного отрезка $x_{i-0.5} = x_i - 0.5h$.

Тогда значение интеграла на частичном отрезке:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f(x_i - 0.5)\cdot h. \tag{4}$$

Подставив это выражение в (5), получим составную формулу средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i - 0.5)\cdot h. \tag{5}$$

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.5.3.(с). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из n прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы n элементарных прямоугольников.

Формулу (5) можно представить в ином виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot h \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot h$$

Эти формулы называются формулой левых и правых прямоугольников соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис.5.3.(a, b). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.

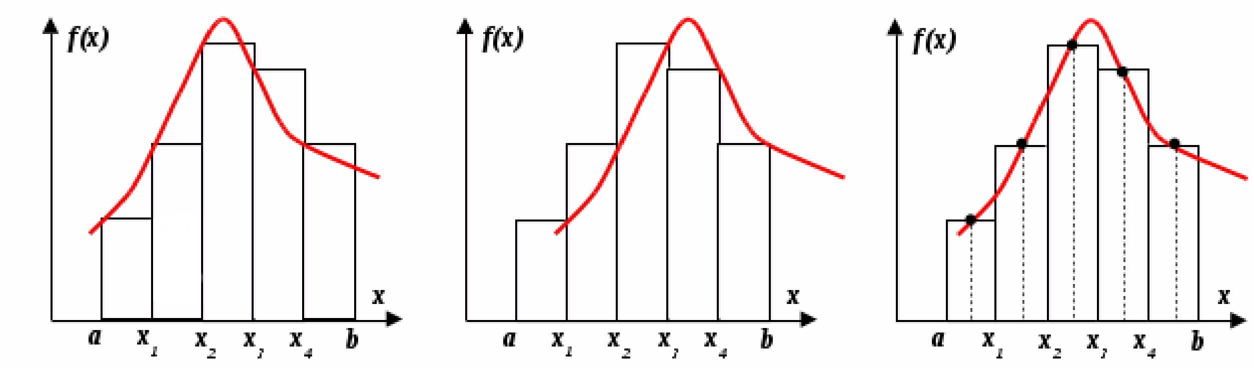


Рис.5.3.(a) Рис.5.3.(b) Рис.5.3.(c)

Пример: По формуле средних прямоугольников вычислить:

$$\int_{1.2}^{2.6} \frac{1}{0.6+x^3} dx$$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала установим значения нижнего и верхнего пределов интегрирования, число отрезков разбиения и длину каждого отрезка:

$$a:=1.2 \qquad b:=2.6 \qquad n:=10 \qquad h:=\frac{(b-a)}{n}$$

Далее определим значения всех x_i и вычисляемый интеграл:

$$i:=0\ ..\ n \qquad x_0:=a \qquad x_i := x_0 + i * h \qquad f(x) = \frac{1}{0.6+x^3} dx$$

Вычисление интеграла по формуле средних прямоугольников:

$$IT1 := h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2)$$

В результате $IT1$ будет равно 0.234 что соответствует реальному значению.

Проверка совершается, записью исходного уравнения $I := \int_a^b f(x)\, dx$, где I так же будет равно 0.234.

6.1.2 Метод трапеций

Для данного метода следует на частичном отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ заменить подынтегральную функцию $f(x)$ полиномом Лагранжа первой степени: (т.е. прямой, проходящей через точки, (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i))

$$f(x) = \frac{1}{h}[(x - x_{i-1})f(x_i) - (x - x_i)f(x_{i-1})]$$

В результате получим следующее выражение:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{1}{h}\left[f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})\,dx \; - \; f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)\,dx\right] =$$

$$= \frac{f(x_{i-1}) + f(x_j)}{2}h\,. \quad (6)$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования [a,b] примет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_j)}{2}h.$$

Графически метод трапеций составленного из n трапеций, при этом представлен на рис.6.1. Площадь кривая заменяется вписанной в нее криволинейной трапеции заменяется ломаной. На каждом из частичных площадью многоугольника, отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле (8).

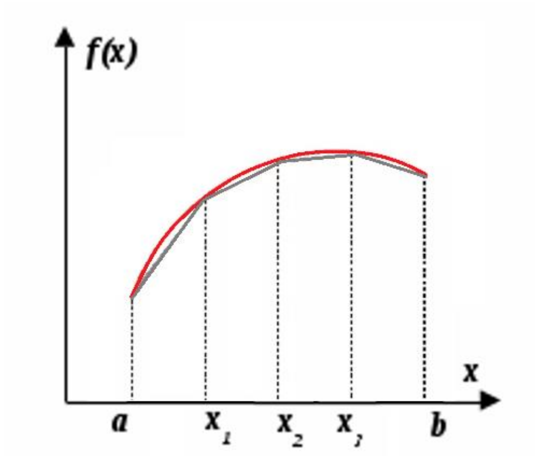


Рис.6 1.

Пример: Используя метод трапеций вычислить: $\int_{1.2}^{2.6} \frac{1}{0.6 + x^3}\,dx$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала установим значения нижнего и верхнего пределов интегрирования, число отрезков разбиения и длину каждого отрезка:

a:=1.2 b:=2.6 n:=10 $h := \frac{(b-a)}{n}$

Далее определим значения всех x_i и вычисляемый интеграл:

i:=0 .. n x_0:=a $x_i := x_0 + i * h$ $f(x) = \frac{1}{0.6+x^3} dx$

Вычисление интеграла по формуле трапеций:

$$IT1 = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{1=1}^{n-1} \big(f(x_i) \big) \right)$$

В результате $IT1$ будет равно 0.2356 что почти соответствует реальному значению.

Проверка совершается, записью исходного уравнения $I := \int_a^b f(x)\, dx$, где I будет равно 0.234.

Замечание. Несмотря на то, что в методе трапеций используется более высокий порядок интерполяции подынтегральной, по сравнению с методом прямоугольников, который использует интерполяцию нулевого порядка, точность метода трапеций оказывается ниже точности метода средних прямоугольников. Более высокая точность метода средних прямоугольников объясняется “удачным” выбором узловых точек, в которых вычисляется высота элементарного прямоугольника.

6.1.3 Метод Симпсона (метод парабол)

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки x_{i-1}, $x_{i-0.5}$, x_i то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени.

Аналогично методу трапеций, после интегрирования, мы получим следующее выражение:

$$\int_{x_i-1}^{x_i} f(x)\, dx \approx \frac{h}{6} \left(f_{i-1} + 4 f_{i-0,5} + f_i \right)$$

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке [a, b] формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + 4(f_{0.5} + f_{1.5} + \cdots + f_{n-0.5})] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2n} + 2\sum_{j=1}^{2N-2} f_i + 4\sum_{i=0.5}^{2n-1} f_i\right]$$

Графическое представление метода Симпсона показано на рис.7.1. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой.

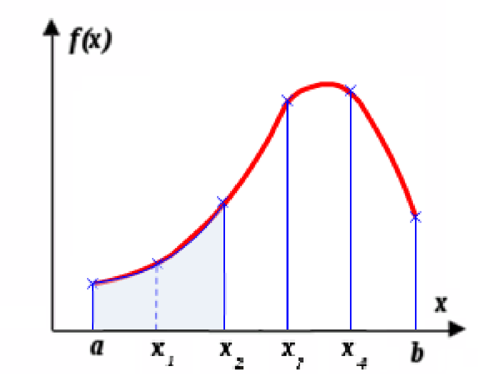


Рис. 7.1.

Пример: Используя метод парабол вычислить: $\int_{1.2}^{2.6} \frac{1}{0.6+x^3}dx$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала установим значения нижнего и верхнего пределов интегрирования, число отрезков разбиения и длину каждого отрезка:

a:=1.2 b:=2.6 n:=10 $h := \frac{(b-a)}{n}$

Далее определим значения всех x_i и вычисляемый интеграл:

i:=0 .. n x_0:=a $x_i \coloneqq x_0 + i * h$ $f(x) = \frac{1}{0.6+x^3}dx$

Вычисление интеграла по формуле Симпсона:

$$IT1 = \frac{h}{6}\sum_{1=1}^{n}\left(f(x_i - h) + 4f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + f(x_i)\right)$$

В результате $IT1$ будет равно 0.234 что соответствует реальному значению.

Проверка совершается, записью исходного уравнения $I \coloneqq \int_a^b f(x)\,dx$, где I будет равно 0.234.

6.1.4 Погрешность формул Ньютона-Котеса

Чтобы разобрать данные погрешности, для начала приведем результаты их оценок (погрешностей):

Методы левых и правый прямоугольников – $|R| \le \frac{1}{2}(b-a)hM_1$

Методы средних прямоугольников – $|R| \le \frac{1}{24}(b-a)h^2M_2$

Метод трапеций – $|R| \le \frac{1}{12}(b-a)h^2M_2$

Метод Симпсона – $|R| \le \frac{1}{2880}(b-a)h^4M_4$

Методы левых и правых прямоугольников являются методами первого порядка.

Методы средних прямоугольников и трапеций имеют второй порядок точности, при этом метод трапеций обладает вдвое большей по абсолютной величине погрешностью по сравнению с методом средних прямоугольников.

Поэтому, если подынтегральная функция задана аналитически, то предпочтительнее из методов второго порядка применять метод средних прямоугольников вследствие его меньшей погрешности. Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности с очень малым численным коэффициентом.

Формула Симпсона позволяет получить очень высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не слишком велика. В противном случае, методы второго порядка точности могут дать большую точность, чем метод Симпсона.

Например, для функции $f(x) = -25x^4 + 45x^2 - 7$ формула трапеций при $n = 2$ для интеграла в пределах [-1, 1] дает точный результат, равный 4, тогда как по формуле Симпсона получим результат, несовпадающий даже по знаку ($-\frac{8}{3}$).

6.1.5 Метод Монте-Карло: численное интегрирование.

Данный метод вынесен отдельно, так как занимает особое положение среди методов вычисления определенных интегралов по двум причинам. Во-первых, это единственный метод, позволяющий вычислять интегралы высокой кратности. И, во-вторых, это метод, который дает лишь вероятностные гарантии степени точности вычисления интегралов.

Предположим, необходимо взять интеграл от некоторой функции. Воспользуемся неформальным геометрическим описанием интеграла и будем понимать его как площадь под графиком этой функции.

Использование метода подразумевают, что область интегрирования [a, b] делится случайным образом на участки шириной $\frac{(b-a)}{n}$, где n — количество случайных точек, а после вычисляется сумма из выборочных средних для каждой точки интеграла (Рис.8.1.). Иначе говоря, разбить отрезок на подотрезки, подсчитать площадь под графиком функции на каждом из них и сложить. Предположим, что для функции, представленной на рисунке 8.1., достаточно разбиения на 25 отрезков, следовательно, сумма вычислений 25 значений функции, даст нам ответ.

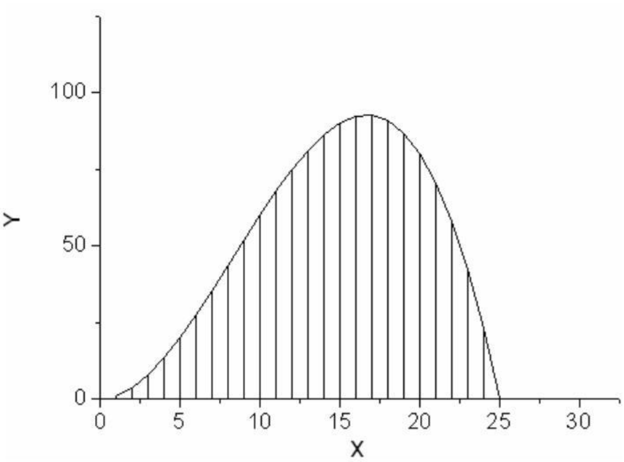


Рис.8.1.

В итоге получаем оценку интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{1=1}^{n}(f(x_i)).$$

Пример: Используя метод Монте-Карло вычислить: $\int_{1.2}^{2.6} \frac{1}{0.6+x^3}dx$

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала установим значения нижнего и верхнего пределов интегрирования, число случайных величин и длину каждого отрезка:

a:=1.2 b:=2.6 n:=1000 $h:=\frac{(b-a)}{n}$

После, реализация случайной величины r, которая принимает случайное значения от 0 до 1 в количестве n+1:

$$r = runif(n+1, 0, 1)$$

Далее определим значения всех x_i и вычисляемый интеграл:

i:=0 .. n x_0:=a $x_i \coloneqq x_0 + (b-a)r_i$ $f(x) = \frac{1}{0.6+x^3}dx$

Вычисление интеграла по формуле Монте-Карло:

$$IT1 = h\sum_{1=1}^{n}(f(x_i))$$

В результате $IT1$ будет примерно равно 0.234 ± 0.03, так как при каждом вычислении берутся различные случайные величины. Следует отметить, что точность вычислений напрямую зависит от их количества.

Проверка совершается, записью исходного уравнения $I \coloneqq \int_a^b f(x)\,dx$, где I будет равно 0.234.

6.2 Вычисление интеграла с заданной точностью

Используя приведенные выше оценки, можно априори (до проведения расчета) определить шаг интегрирования h, при котором погрешность вычисленного результата гарантированно не превысит допустимый уровень погрешности ε.

Однако на практике пользоваться априорными оценками погрешности не всегда удобно. Тогда контроль за точностью получаемого результата можно организовать следующим образом. Пусть вычисления проводились с постоянным шагом h, $I^{(h)}$ – вычисленное с шагом h приближенное значение интеграла I. Если затем вычислить приближенное значение $I^{\left(\frac{h}{2}\right)}$с шагом $\frac{h}{2}$, то в качестве оценки погрешности последнего вычисленного значения можно рассматривать величину $\left|I^{\left(\frac{h}{2}\right)} - I\right| \approx \left|I^{\left(\frac{h}{2}\right)} - I^{(h)}\right|$.

При необходимости вычислить результат с заданной точностью ε вычисления повторяют с последовательно уменьшающимся (вдвое) шагом до тех пор, пока не выполнится условие $\left|I^{\left(\frac{h}{2}\right)} - I^{(h)}\right| \le$ ε.

Вопросы для самоконтроля для самоконтроля

1. В чем состоит идея методов Ньютона-Котеса для приближенного вычисления определенных интегралов?
2. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h?
3. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?
4. Почему метод средних прямоугольников неприменим для численного интегрирования таблично заданных функций?
5. Каковы преимущества формулы Симпсона по сравнению с формулой трапеций и следствием чего являются эти преимущества?
6. В каком случае формула Симпсона дает точное значение интеграла?
7. Какой подход используется на практике для вычисления интеграла с заданной точностью?

Лабораторная работа к главе 6

Приближенное вычисление интегралов

Цель: научиться приближенно вычислять интегралы различными методами

Задание 1. Составить в MathCAD программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке [a, b] по формулам средних прямоугольников, трапеции, Симпсона, Монте-Карло с точностью ε = 10^{-4}. Произвести оценку погрешности.

Варианты к заданию 1.

1) $\int_0^2 \left(e^{x^2} + x\right) dx$ 11) $\int_{1.4}^{2.4} \frac{Sin\, x\, dx}{2x-1.2}$ 21) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+6}}$

$2)\ \int_{4}^{5.2}(ln\,x+x)\,dx$

$3)\ \int_{1.4}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}+2}$

$4)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Cosx\,dx}{1+x}$

$5)\ \int_{0.7}^{2.3}\frac{dx}{\sqrt{2x^3+0.3}}$

$6)\ \int_{0.5}^{3.5}\sqrt{4x^3+1}\,dx$

$7)\ \int_{0.5}^{2.4}\frac{dx}{1+x^3}$

$8)\ \int_{0.1}^{2}\frac{Cosx\,dx}{0.3x}$

$9)\ \int_{1}^{3.2}\sqrt{6x^2-5}\,dx$

$10)\ \int_{1.1}^{2.7}2.6x^2\,ln\,x\,dx$

$12)\ \int_{1.5}^{2.5}\frac{dx}{\sqrt{2x^2-1.7}}$

$13)\ \int_{0}^{2.8}\frac{x\,dx}{1+x^3}$

$14)\ \int_{-y}^{-0.8}\frac{2.3\,dx}{1+e^{-x}}$

$15)\ \int_{0.5}^{2.5}ln(1+x^2)\,dx$

$16)\ \int_{-1}^{2.4}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^3}$

$17)\ \int_{0.5}^{2.5}\sqrt{4Cosx+1}\,dx$

$18)\ \int_{-1}^{1}\left(e^{x^2}-2x\right)dx$

$19)\ \int_{1}^{2.3}\frac{ln(x^2+2)\,dx}{x}$

$20)\ \int_{0.5}^{2.5}\frac{7Cosx\,dx}{2x+1.9}$

$22)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,dx}{1+Cosx}$

$23)\ \int_{0}^{1.7}(3x^2-4x)\,dx$

$24)\ \int_{1}^{1.8}\left(5^{-x^2}+x\right)dx$

$25)\ \int_{3}^{4.9}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.45}}$

$26)\ \int_{\nu\cdot 5}^{2.5}\frac{Cosx\,dx}{0.1x}$

$27)\ \int_{2}^{3.6}1.1x^3\,ln\,x\,dx$

$28)\ \int_{2.1}^{3.6}\frac{dx}{\sqrt{x^3-7}}$

$29)\ \int_{1.4}^{1.9}\frac{3\,arccos\,x\,dx}{x-1.2}$

$30)\int_{0.5}^{2.5}(2x+2)\,cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

ГЛАВА 7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящее время разработано большое количество методов решения дифференциальных уравнений через элементарные функции, однако на практике эти методы бывают или совсем невозможны, или слишком громоздки. Поэтому для решения практических задач созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Условно эти методы делят на три группы в зависимости от формы представления решения:

— аналитические методы, дающие приближенное решение в виде аналитического выражения;

— графические методы, дающие приближенное решение в виде графика;

— численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Ниже рассматриваются следующие методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: интегрирование дифференциальных уравнений с помощью формулы Тейлора, метод последовательных приближений (метод Пикара), метод Эйлера и его модификации, метод Рунге-Кутта.

7.1 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения точными методами невозможно, его решение ищут в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты C_n $(n = 0, 1, 2, K)$ находят подстановкой ряда в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удаётся найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

Пусть задано обыкновенное, разрешённое относительно производной, дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$.

Требуется решить задачу Коши при начальном условие $y(x_0) = y_0$.

Решение можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

где n- целое неотрицательное число, $y(x_0) = y_0$ $y' = f(x, y)$.

дальнейшие производные $y^{(k)}(x_0)$ находим последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой вместо x, y, y, k значений x_0, y_0, y_0, k.

То есть в формулы дифференцирования исходного уравнения

$$y' = f(x, y); \quad y' = f'_x + f'_y \cdot y'; \quad y''' = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} \cdot {y'}^2 + f'_y \cdot y''$$

подставляют начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков.

Пример. Найти приближённое решение дифференциального уравнения $y' = x - 2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, в виде многочлена пятой степени.

Решение: будем искать приближённое решение данного дифференциального уравнения в виде ряда Тейлора:

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Продифференцируем исходное уравнение. Так как $y'_0 = 0$ следовательно $y''_0 = 1 + (-2)y' = 1$, $\quad y''' = -2y'' = -2$,

$y'''' = -2y''' = 4$, $\quad y''''' = -2y'''' = -8$

Подставим найденные значения производных в уравнение Тэйлора и получим требуемое приближённое решение в виде многочлена пятой степени:

$$y = \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!}$$

7.2 Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений так же позволяет получить приближённое решение задачи Коши, определяемой дифференциальным уравнением, разрешённым относительно производной, дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ и с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Для этого проинтегрируем обе части уравнения $y' = f(x, y)$ от x_0 до x:

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad \text{откуда} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Очевидно, что решение данного интегрального уравнения будет удовлетворять начальному уравнению и его начальному условию. При $x = x_0$ интегральное уравнение выглядит $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}x = y_0$

Для получения первого приближения необходимо заменить в равенстве выше неизвестную функцию у известным значением y_0:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x.$$

Для нахождения последующих приближений (второго), достаточно заменить под интегральное значение y_0 на найденное нами значение первого приближения y_1: $y_2(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,\mathrm{d}x$. В общем случае итерационная формула имеет вид

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{\mathrm{n}-1})\,\mathrm{d}x\,, \quad (n = 1, 2, 3, ..)$$

Заметим, что последовательность функций y_1 (x), y_2 (x), ..., y_n (x), сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. Это означает, что -й член последовательности является приближением к точному решению уравнения с определённой степенью точности.

Пример. Найти три последовательных приближения решения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющего начальному условию y $(0) = 1$.

Решение. В качестве начального приближения возьмём $y_0 = \mathrm{y}(0) = 1$, тогда: первое приближение будет следующим

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_{0}^{x} (x + 1)\,\mathrm{d}x$$

второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_{0}^{x} (x + (y_1(x))^2)\,\mathrm{d}x$$

третье приближение:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_{0}^{x} (x + (y_2(x))^2)\,\mathrm{d}x$$

7.3 Метод Эйлера

Метод Эйлера — простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Суть метода заключается в том, что искомую интегральную кривую $y = y(x)$ заменяют ломаной M0M1M2 ..., звенья которой являются касательными к интегральным кривым.

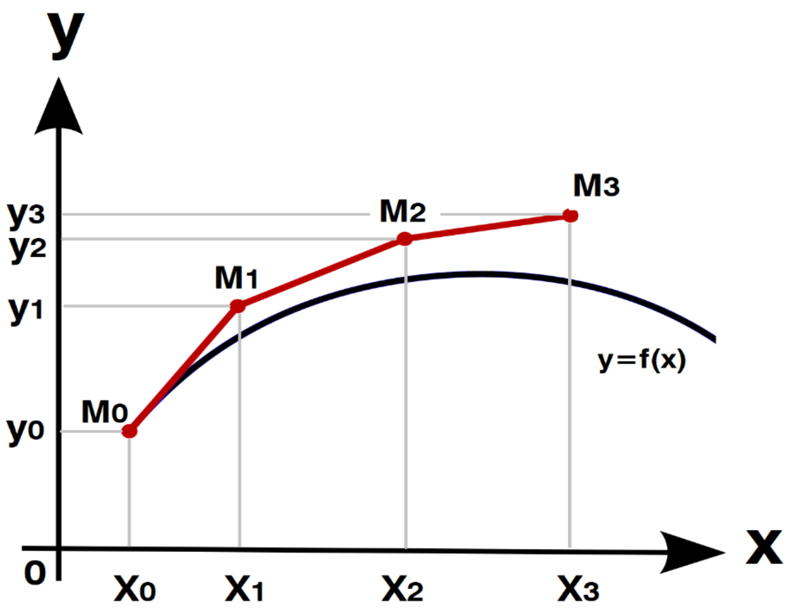


Рис.9.1.

Пусть требуется решить задачу Коши, дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ и с начальным условием $y(x_0) = y_0$

Выбрав достаточно малый шаг h, строится система равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,2 \ldots n)$

Но вместо искомой интегральной кривой $y = y\,(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ рассматривается отрезок касательной L1 к ней в точке M0 (x_0, y_0)

Уравнение касательной L_1, в силу задачи Коши, имеет вид

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

При $x = x_1$ из уравнения касательной L_1 получим

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

откуда видим, что приращение функции на первом шаге имеет вид

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0).$$

Аналогично, проводя касательную L2 к некоторой интегральной кривой семейства в точке M1(x1, y1), получим $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

При $x = x_2$ имеем $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, т.е. y_2 получается из y_1 добавлением приращения $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1)$.

Таким образом, значения искомой функции $y(x)$ могут быть определены по формулам: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$

где $i = 0,1,2 \ldots n$, которые называются *вычислительными формулами метода Эйлера.*

Погрешность «обычного» метода Эйлера не превосходит шага разбиения $|y_{i+1} - y_i|$

Пример. Найти методом Эйлера, численное решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала запишем исходное уравнение, установим промежуток изменение аргумента x, значения шага h изменение аргумента, количество итераций i(количество шагов h на промежутке x):

$f(x, y) = x^3 + y$ $\quad$ $x := 0{,}0.1\,..\,1$ $\quad$ $h := 0.1$ $\quad$ $i := 0\,..\,9$

Зададим начальное условие в векторном виде:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

И значение вычислительных формул:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + hf(x_i, y_i) \end{bmatrix}$$

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6
7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

	0
0	1
1	1,1
2	1,21
3	1,332
4	1,468
5	1,621
6	1,796
7	1,997
8	2,231
9	2,505
10	2,828

Проверка осуществим с помощью функции $rkfixed()$:

Для этого определим с какого элемента будет показана таблица вычислений:

$ORIGIN := 1$

Определим нашу функцию:

$f(x, y) = x^3 + y$

И используем саму функцию $rkfixed(y_0, x_0, h, i, f)$:

$rkfixed(1,0,0.1,10, f)$

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6
7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

	0
0	1
1	1,105
2	1,222
3	1,352
4	1,499
5	1,666
6	1,859
7	2,083
8	2,347
9	2,658
10	3,028

Как можно заметит найденные приближенные значения практически совпадают с истинными значениями.

7.4 Модификации метода Эйлера

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность. Рассмотрим некоторые из них.

Первый модифицированный метод Эйлера. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения искомой функции $y_{i+0.5}$ в точках $x_{i+0.5} = x_i + \frac{h}{2}$ с помощью формулы:

$$y_{1+0.5} = y_i + \frac{h}{2} f_i = y_i + \frac{h}{2} f(x, y)$$

Затем находится значение правой части исходного уравнения в средней точке $f_{i+0.5} = f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})$ и затем полагается

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+0.5}, \qquad i = 0,1, \dots n-1 \ .$$

Эти формулы являются расчетными формулами первого модифицированного метода Эйлера.

Первый модифицированный метод Эйлера является одношаговым методом со вторым порядком точности.

Второй модифицированный метод Эйлера – Коши. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения

$$y_{j+1} = y_i + h f(x_i, y_i).$$

Затем приближения искомого решения находятся по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \qquad i = 0,1, \dots n-1.$$

Эти формулы являются расчетными формулами второго модифицированного метода Эйлера – Коши.

Усовершенствованный метод Эйлера гарантирует точность: $h^2 = (0.1)^2 = 0.01$

Второй модифицированный метод Эйлера – Коши так же, как и первый, является одношаговым методом со вторым порядком точности.

Поскольку описанные методы предполагают повторяющиеся вычисления на каждом шаге, то они легко программируются и могут быть реализованы на компьютере.

Пример. Найти модифицированным методом Эйлера, численное решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющее начальному условию у $(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала запишем исходное уравнение, установим промежуток изменение аргумента x, значения шага h изменение аргумента, количество итераций i(количество шагов h на промежутке x):

$f(x, y) = x^3 + y$ $\qquad x \coloneqq 0{,}0.1\,..\,1$ $\qquad h := 0.1$ $\qquad i \coloneqq 0\,..\,9$

Зададим начальное условие в векторном виде:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

И значение вычислительных формул:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} x_{\mathrm{i}} + h \\ y_i + \dfrac{h}{2} \cdot \Big(f(x_i\,,\, y_i) + f\big(x_i + h\,,\, y_i + hf(x_i\,, y_i)\big)\Big) \end{bmatrix}$$

Результаты вычислений:

	0
0	1
1	1,105
2	1,221
3	1,351
4	1,498
5	1,665
6	1,857
7	2,081
8	2,344
9	2,655

10	3,024

x =

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6
7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

Проверка осуществим с помощью функции $rkfixed()$:

Для этого определим с какого элемента будет показана таблица вычислений:

$ORIGIN := 1$

Определим нашу функцию:

$f(x, y) = x^3 + y$

И используем саму функцию $rkfixed(y_0, x_0, h, i, f)$:

$rkfixed(1,0,0.1,10, f)$

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6
7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

	0
0	1
1	1,105
2	1,222
3	1,352
4	1,499
5	1,666
6	1,859
7	2,083
8	2,347
9	2,658
10	3,028

Как можно заметит найденные приближенные значения практически совпадают с истинными значениями.

7.5. Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге – Кутта является одним из наиболее употребительных методов высокой точности. Метод Эйлера можно рассматривать как простейший вариант метода Рунге – Кутта, так как расчетная формула для задачи Коши имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)} + k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$$

где $k_1^{(i)} = hf(x, y)$,

$$k_2^{(i)} = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(x,y)}{2}\right),\quad k_3^{(i)} = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2(x,y)}{2}\right),$$

$k_4^{(i)} = hf\big(x + h, y + k_3(x, y)\big)$, при $i = 0,1, \dots\ n$

Классический метод Рунге-Кутты обеспечивает точность $h^4 = (0.1)^4 = 0{,}0001$.

Пример. Найти методом Рунге - Кутты, численное решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющее начальному условию у $(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение задания в среде универсальной математической системы MathCAD:

Для начала запишем исходное уравнение, установим промежуток изменение аргумента x, значения шага h изменение аргумента, количество итераций i(количество шагов h на промежутке x):

$f(x, y) = x^3 + y$ $\quad x := 0{,}0.1\,..\,1$ $\quad h := 0.1$ $\quad i := 0\,..\,9$

Зададим начальное условие в векторном виде:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

И основные вычислительные формулы для метода Рунге – Кутта:

$$k_1(x, y) := hf(x, y)$$

$$k_2(x, y) := hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(x, y)}{2}\right)$$

$$k_3(x, y) := hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2(x, y)}{2}\right)$$

$$k_4(x, y) := hf\big(x + h, y + k_3(x, y)\big)$$

$$k(x,y) \coloneqq \frac{\left(k_1(x,y) + 2k_2(x,y) + 2k_3(x,y) + k_4(x,y)\right)}{6}$$

Главная расчетная формула

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} x_{\mathrm{i}} + h \\ y_i + \frac{h}{2} \cdot k(x_i\ ,\ y_i) \end{bmatrix}$$

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6
7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

	0
0	1
1	1,105
2	1,221
3	1,352
4	1,498
5	1,666
6	1,858
7	2,083
8	2,346
9	2,658
10	3,027

Проверка осуществим с помощью функции $rkfixed()$:

Для этого определим с какого элемента будет показана таблица вычислений:

$ORIGIN := 1$

Определим нашу функцию:

$f(x,y) = x^3 + y$

И используем саму функцию $rkfixed(y_0, x_0, h, i, f)$:

$rkfixed(1{,}0{,}0.1{,}10, f)$

Результаты вычислений:

	0
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
5	0,5
6	0,6

x =

7	0,7
8	0,8
9	0,9
10	1

y =

	0
0	1
1	1,105
2	1,222
3	1,352
4	1,499
5	1,666
6	1,859
7	2,083
8	2,347
9	2,658
10	3,028

Как можно заметить найденные приближенные значения практически совпадают с истинными значениями.

Численные методы имеют ряд важнейших достоинств: относительно высокая точность, явная схема вычислений y_{n+1} за определенное количество шагов и по определенным формулам, возможен переменный шаг, т.е. можно сменить шаг, где функция быстро меняется.

Лабораторная работа к главе 7

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: научиться решать дифференциальные уравнения различными приближенными методами: методом Эйлера, методом Эйлера-Коши, методом Рунге-Кутта.

Задание 1. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f\,(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии y(a) = c и шаге интегрирования h:

1) методом Эйлера с шагом $2h$ и с шагом h;

2) модифицированным методом Эйлера (методом Эйлера - Коши или усовершенствованным методом ломаных);

3) методом Рунге-Кутта с шагом $2h$ и с шагом h.

Результаты округлить до 0,0001. Сравнить полученные разными методами решения. Построить графики полученных решений.

Вариант	$f\ (x,y)$	a	b	c	h
1	$2-sin(x+y)^2$	2	3	2.3	0.1
2	$cos(1.5x-y^2)-1,3$	-1	1	0.2	0.2
3	$cos(1.5y+x^2)+1.4$	1	2	0.9	0.1
4	$cos(0.6+y)+2.5x$	1	3	1.5	0.2
5	$1,5+sin(x+y)$	1.5	2.5	0.5	0.1
6	$\sqrt{4x^2+1}-3y^2$	2.6	4.6	1.8	0.2
7	$\sqrt{x^2+0,5y^2}+1$	0	2	2.9	0.2
8	$\frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$	0	2	1	0.2
9	$\frac{tg(x)-y}{cos^2 x}$	0	2	0	0.2
10	$arcsin\, x+x-\frac{xy}{1-x^2}$	0	1	3	0.1
11	$4.1x-y^2+0.6$	0.6	2.6	3.4	0.2
12	$e^{-(y^2+1)}+2x$	0	0.5	0.3	0.05
13	$\frac{1}{1+x^3y}+2y$	1.5	2	2.1	0.05
14	$\frac{2}{2+x}+x+1$	0.1	0.5	1.25	0.05
15	$\frac{2xy}{4+x}-0.4$	3	5	1.7	0.2
16	$x\sqrt[2]{2-x^3}$	0	1	0.4	0.1
17	$\frac{cos\, x}{1+sin\, x}$	0	$\pi/2$	0.3	$0.05\,\pi$
18	$ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)x$	0	1	0.1	0.1
19	$x^2e^{-\frac{x^3}{2}}$	0	1	0.25	0.1
20	$\frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	1	2	0.7	0.1
21	$\frac{x}{\sqrt{4x+5}}$	0	1	0.3	0.1
22	$x^2\, cos\, x$	0	$\pi/2$	0.2	$0.05\,\pi$
23	$x\sqrt[2]{1+4x^3}$	0	1	0.1	0.1

24	$x\,sin(x^2)$	0	$\pi/2$	0.5	0.05 π
25	$\frac{e^x}{1+e^{2x}}$	0	1	0.5	0.1
26	$\frac{sin\,2x}{\sqrt{1-cos\,2x}}$	0	$\pi/2$	0.25	0.05 π
27	$ln(x+1)$	0	1	0.2	0.1
28	$tg^2\left(\frac{x}{2}\right)$	0	$\pi/2$	0.9	0.05 π
29	$\sqrt{1+x^2}$	0	1	0.2	0.1
30	$sin^x\sqrt{3+cos\,x}$	0	π	0.1	0.1 π

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы : учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 672 с. – ISBN 978-5-8114-1623-3. – URL: https://e.lanbook.com/book/168619.
2. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 252 с. – ISBN 978-5-8114-7899-6. – URL: https://e.lanbook.com/book/167179.
3. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 608 с. – ISBN 978-5-8114-0892-4. – URL: https://e.lanbook.com/book/167761.
4. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 392 с. – ISBN 978-5-8114-4549-3. – URL: https://e.lanbook.com/book/133925.

Дополнительная литература

5. *Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.-2-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. – 632с.: ил. – (Серия «Технический университет»). – ISBN 5-93208-043-4.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учеб. / В.М. Вержбицкий. – 3-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 2009. – 840 с. – ISBN 978-5-985-06-1781-1.
7. Гунцов, А. В. Вычислительные методы : учебное пособие / А. В. Гунцов, Л. В. Гунцова. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2011. – 122 с. – ISBN 978-5-9961-0505-2. – URL: https://e.lanbook.com/book/39205.
8. *Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – 8-е изд., стер.– СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 672с.: ил. – (Классическая учебная литература по математике).
9. Жарова, Н.Р. Численные методы в инженерных расчетах: учебное пособие / Н.Р.Жарова. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос ун-та, 2013. – 150 с.– ISBN 978-5-00047-050-3.
10. *Турчак, Л.И. Основы численных методов: учебное пособие / Л.И. Турчак , П.В. Плотников. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2004. – 304с. – ISBN 5-9221-0153-6.
11. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань,

2021. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-1888-6. – URL: https://e.lanbook.com/book/168828.

12. Огородникова, О. М. Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге : учебное пособие / О. М. Огородникова. – Екатеринбург : УрФУ, 2013. – 130 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/98928.
13. Плохотников, К. Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB: курс лекций : учебное пособие / К. Э. Плохотников. – 2-е изд., испр. – Москва : Горячая линия-Телеком, 2016. – 496 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/111087.
14. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 496 с. – ISBN 978-5-8114-1246-4. – URL: https://e.lanbook.com/book/167885.

Библиографический список

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.В.Лапин, Е.В. Чижов; под общ. ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк. 2009. – 190 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985. –384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, Ряды. ФКП. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 280 с.: ил.
5. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б. П. Демидович, И.А Марон. – 7-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 672 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
6. Калиткин, Н.Н. Численные методы: учебное пособие / Н.Н. Калиткин. – 2-е изд., испр. – СП-б.: Издательство БХВ, Петербург, 2011. – 586 с.
7. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – 2-е изд., стер. – СП-б.: Издательство Лань., 2008. – 368 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1988-1989.
9. Лапчик, М.П. Численные методы: учебное пособие для студ. вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 384 с.
10. Плис, А.И. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656с.: ил.
11. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
12. Швецов, Г.С. Численые методвы линейной алгебры: учебное пособие / Г.С. Швецов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. – М.: Финансы и статистика: ИНФРА-М, 2008. – 480 с.