



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**ФИЛИАЛ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
**В Г. НИЖНЕВАРТОВСКЕ**

Кафедра «Гуманитарные, естественнонаучные и технические дисциплины»

---

**В.В. КОЛЕДИН**

## **Исследование операций**

Методические указания  
к выполнению практических работ  
для обучающихся всех форм обучения  
по направлениям подготовки  
«Программная инженерия»,  
«Информатика и вычислительная техника»

ББК 22.18  
И 88

*Одобрено  
редакционно-издательским советом филиала*

**Исследование операций:** методические указания к выполнению практических работ для обучающихся всех форм обучения по направлениям подготовки «Программная инженерия», «Информатика и вычислительная техника» / сост. В.В. Коледин. – Нижневартовск, 2026. – 65 с.

Методические указания соответствуют требованиям ФГОС ВО и компетенциям, необходимым для усвоения курса «Исследование операций».

В методических указаниях даются описания практических работ и порядок их выполнения.

## Оглавление

ОСНОВЫ РАБОТЫ В MATHCAD .....	4
Практическая работа №1 .....	20
Основы работы в mathcad .....	20
Практическая работа № 2.....	33
Постановка и решение задачи линейного программирования .....	33
Решение задачи ЛП графическим методом .....	33
Практическая работа № 3.....	46
Решение задачи ЛП симплекс-методом .....	46
Практическая работа №4 .....	49
Двойственная задача линейного программирования .....	49
Практическая работа №5 .....	53
Транспортная задача .....	53
Практическая работа №6 .....	62
Решение задач нелинейного программирования.....	62
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	65

# ОСНОВЫ РАБОТЫ В MATHCAD

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Объекты программы MathCad: формулы и текстовые блоки, - располагаются в документе MathCad, который называется рабочий лист. В процессе выполнения расчетов формулы обрабатываются постепенно, слева направо и сверху вниз.

Ввод информации выполняется в место положения курсора, который может быть представлен в одном из трех видов:

- 1) курсор в виде крестика используется, если этот курсор определяет местоположение следующего объекта;
- 2) угловой курсор используется при введении формул. Этот курсор указывает на текущий элемент выражения;
- 3) текстовый курсор (I-образная вертикальная черточка) используется при введении текста.

## ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

### 1.1 Математические панели

Математических панелей в MathCad девять. Приоткрываются панели с помощью соответствующих команд панели Math (Математические) (рис.1), однако можно использовать и стандартный метод обращения к меню Toolbars (Инструменты), меню View (Вид).

Кратко охарактеризуем все панели семейства Math (Математические).

– Calculator (Калькулятор, Арифметика). На данной панели расположены арифметические операторы, цифры от 0 до 9, наиболее распространенные функции и математические константы, а также операторы вывода (рис.1, а).

– Graph (Графические, Графики). С помощью этой панели можно вызвать шаблоны для построения разнообразных графиков и поверхностей. На панели также расположены ссылки на инструменты для анализа данных (рис.1, б).

– Matrix (Матричные, Матрица). На панели расположены операторы создания, обращение, транспонирование матриц, а также операторы матричных индексов и колонок. На панели также расположены операторы для работы с векторами (рис.1, в).

– Evaluation (Выражения). На панели находятся ссылки на все операторы ввода и вывода в MathCad, а также шаблоны для создания пользовательских операторов (рис.1, г).

– Calculus (Вычислительные, Вычисление, Матанализ). На панели находятся применяемые при решении задач математического анализа операторы: определенного и неопределенного интегралов, производных, пределов, сложений и произведений, символ бесконечности (рис.1, д).

– Boolean (Булевы, Логика). Эта панель предназначена для задания логических операторов (рис.1, е).

– Programming (Программирование). Панель содержит операторы языка программирования MathCad (рис.1, ж).

– Greek (Греческие, Греческий Алфавит). На данной панели расположенные буквы греческого алфавита (рис.1, з).

– Symbolic (Символика, Символы). Панель предназначена для проведения аналитических преобразований (рис.1, и).

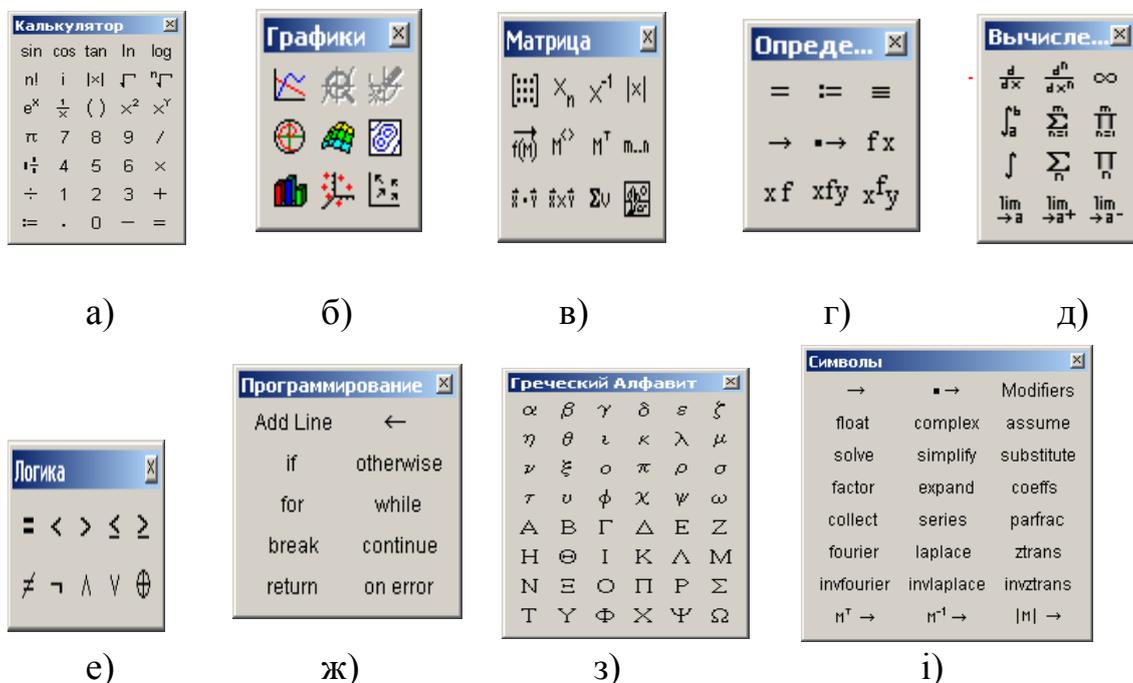


Рисунок 1 – Математические панели инструментов программы MathCad

### СОЗДАНИЕ ФОРМУЛ

Формулы - основные объекты MathCad. Новый объект по умолчанию является формулой. Для того, чтобы начать ввод формулы необходимо установить крестообразный курсор в нужное место и начать ввод букв, цифр, знаков операций. При этом создается область формулы, в которой появляется угловой курсор.

Элементы формул можно вводить с клавиатуры или с помощью панелей.

Формулы, которые введены в MathCad, автоматически приводятся к стандартной научно-технической форме записи.

В программе MathCad можно использовать буквенные определения, которым сопоставляются числовые значения, и которые рассматриваются как переменные. Буквенные значения задаются с помощью оператора присваивания (он вводится символом ":="). Таким же образом можно задавать числовые последовательности, аналитически определенные функции, матрицы, векторы.

При введении бинарного оператора за знаком операции автоматически появляется заполнитель в виде прямоугольника, в это место вводится следующий операнд. Для управления порядком операций используются

круглые скобки, которые можно вводить вручную. Угловой курсор разрешает автоматизировать такие действия:

- для выделения элементов формулы, которые в рамках операции должны рассматриваться как одно целое, используется клавиша Space;
- при нажатии каждого раза на клавишу Space угловой курсор расширяется, включая элементы формулы, которые расположены рядом с данным;
- после введения знака операции элементы в пределах углового курсора автоматически заключаются в скобки.

Если все значения переменных известны, то для вычисления числового значения выражения (скалярного, векторного или матричного) необходимо подставить все числовые значения и выполнить заданные действия. В программе MathCad применяется оператор вычисления, который вводится символом " $=$ ". Кроме того, есть возможность задавать значение известных параметров, провести вычисление с представлением аналитическими формулами, результат присвоить некоторой переменной, а потом использовать оператор вычисления для вывода значения этой переменной.

Комментарии, описания и иллюстрации располагаются в текстовых блоках, которые игнорируются при проведении расчетов.

При изменении любой формулы программа автоматически выполняет необходимые вычисления, обновляя при этом значения и графики, которые изменились.

При проведении расчетов с использованием реальных физических величин учитывается их размерность. В программе MathCad единицы измерения (в любой системе) присоединяются к значению величины с помощью знака умножения.

## ГРАФИКИ

Графики, которые строятся на основе результатов вычислений также рассматриваются как формулы.

В Mathcad встроено несколько типов разных графиков, которые можно разбить на две группы: двумерные и трехмерные графики.

Все основные типы графиков и инструменты работы с ними расположены на рабочей панели Graph (Графические) семейства Math (Математические) (рис.2,б):

- График кривой в двумерной декартовой системе координат (X-Y Plot).
- График кривой в полярной системе координат (Polar Plot).
- Поверхность (Surface).
- Контурный график (Contour Plot).
- Столбиковая трехмерная (3D) диаграмма (3D Bar Plot).
- Точечный трехмерный (3D) график (3D Scatter Plot).
- Векторное поле (Vector Field).

Аналогично панели Graph (Графические) список всех типов графиков Mathcad расположен в одноименном подменю меню Insert (Вставка).

## Двумерные графики

В Mathcad существует несколько способов задания кривых в декартовой системе координат, однако первый шаг для всех один и тот же.

Первым шагом есть введения специальной заготовки для будущего графика - так называемой графической области. Ввести графическую область как для декартового, так и для любого другого графика можно: из панели Graph (Графические), командой одноименного меню Insert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Shift+2.

Графическая область представляет собой две вложенные рамки. Во внутренней отображаются непосредственно кривые зависимости. Пространство между рамками служит для визуализации разного рода служебной информации. Графическую область можно увеличивать и уменьшать с помощью специальных маркеров, расположенных на ее внешней рамке. Перемещать по документу и удалять графические области можно так же, как простые формулы. Окно форматирования вида графической области (Properties (Свойства) также целиком совпадает с аналогичным окном для формул. Открыть его можно с помощью одноименной команды контекстного меню графика (вызывается щелчком правой кнопкой мыши на графической области).

В окне Properties (Свойства) могут быть полезными два параметра, расположенных на вкладке Display.

– Highlight Region (Цветная область). Установив этот флажок можно на палитре Choose Color (Выбор цвета) определить наиболее подходящий цвет заливки для графической области.

– Show Border (Показать границу). Параметр отвечает за отображение внешней границы графической области. По умолчанию граница не визуализируется.

После того как графическая область будет введена, в общем случае нужно задать два размерных вектора, которые определяют значение координат точек. Сделать это можно разными способами.

Наиболее простым методом задания координатной сетки есть так называемый быстрый метод. При его применении пользователь задает только имя переменной и вид функции, а шкалы осей и величину шага между узловыми точками автоматически определяет система. Чтобы построить кривую функции быстрым методом, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Ввести графическую область.
2. В специальном маркере, расположенном в центре под внутренней рамкой графической области, задать имя переменной.
3. В центральный маркер, расположенный по левую сторону от внутренней рамки, ввести функцию или имя функции.

К недостаткам рассмотренного метода относится прежде всего то, что область изменения переменной для всех функций определяется одинаково: от -10 до 10.

Для того, чтобы изменить область изменения, нужно просто уменьшить интервал изменения переменной или функции. Для этого необходимо

выделить графическую область щелчком левой кнопки мыши. Непосредственно под крайними значениями (для оси X) или по левую сторону от них (для оси Y) появятся цифры, которые отражают максимальные и минимальные величины координат узловых точек графика. Чтобы изменить их значения необходимо удалить старые величины и ввести другие. Изменения границ по оси X вызывает автоматический перерасчет крайних значений по оси Y.

На практике же, как правило, приходится определять границы сразу по обоим осям. Это связано с тем, что хорошо подобрать интервал по оси значений функции системе удается далеко не всегда. Это можно сделать для настраивания вида графика рассмотренной функции, изменяя диапазон как по оси X, так и по оси Y.

В ряде случаев намного удобнее задать векторы данных самостоятельно. Выполнить это можно с помощью оператора ранжированной переменной (вводится из панели Matrix (Матричные)).

Чтобы задать вектор значений переменной с помощью оператора Range Variable (Ранжированная переменная), выполняется следующая последовательность действий.

1. Ввести имя переменной вместе с оператором присваивания.
2. Задать левую границу интервала построения и поставить запятую.
3. Ввести оператор ранжированной переменной.
4. В левом маркере введенного оператора задать вторую точку на промежутке (тем самым определяется шаг).
5. В правый маркер оператора ранжированной переменной вводится значение правой границы на интервале.

В результате переменная и функция будут заданы в виде двух размерных векторов, по которым будет построен график.

Использование способа построения графика с помощью оператора ранжированной переменной имеет очень важное преимущество перед быстрым методом, поскольку позволяет задавать произвольным образом шаг между узловыми точками.

Построить график в Mathcad можно и по готовым векторам или таблицам данных, полученных, например, при эксперименте или выполнении лабораторной работы.

В Mathcad на одну графическую область можно поместить до 16 кривых. Чтобы добавить к уже имеющемуся графику еще один, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Установить курсор по правую сторону от выражения, которое определяет координаты последнего ряда данных по оси Y (предварительно выделив его).
2. Опустить курсор на строку ниже, нажать на знак запятой (,) и в маркер, который появился, ввести выражение для новой функции или имени функции.

С помощью описанного метода можно построить графики функций одной переменной. Если же кривые, которые нужно отобразить на одной области, зависят от разных переменных, то их, полностью аналогично

добавлению новых функций, следует ввести через запятую в нижний маркер в том же порядке, в котором вводились соответствующие им функции.

Задание графиков в полярной системе координат с технической точки зрения не имеет ровно никаких принципиальных отличий от создания графиков на декартовой плоскости. Для начала нужно ввести графическую область. Выполнить это можно или с помощью специальной кнопки Polar Plot (Полярный график) панели Graph (Графические), или комбинацией клавиш Ctrl+7. Как и в случае зависимости X-Y, для полярного графика существует два основных метода построения: быстрый способ построения и использование ранжированных переменных. При задании полярной системы координат по быстрому методу система автоматически определит область изменения угла от 0 до 360°. В отличие от области изменения угла, величину диапазона полярного радиуса можно задать произвольным образом непосредственно на графической области.

Для форматирования графика необходимо дважды нажать на область графика. Для управления отображением линий на графике существует вкладка Traces (Линии) (рис.2, а), где приведен формат каждой линии и элементы управления изменением формата. Поле Legend Label (Описание) задает описание линии, которое отображается, если снять флажок Hide Legend (Закрыть описание) (рис. 2,б). Маркеры для отдельных точек можно выбрать из списка Symbol (Символ), из списка Line (Тип линии) выбирается тип линии, а из списка Color (Цвет) - цвет графика. Список Type (Тип) определяет средство связи отдельных точек графика, а список Weight (Толщина) - толщину линии на графике (рис.2,в).

Форматирование данных графика выполняется с использованием диалогового окна Result Format (рис.2, г).

Аналогично можно построить и отформатировать график в полярных координатах. Для его построения нужно воспользоваться командой Insert/Graph/Polar Plot.

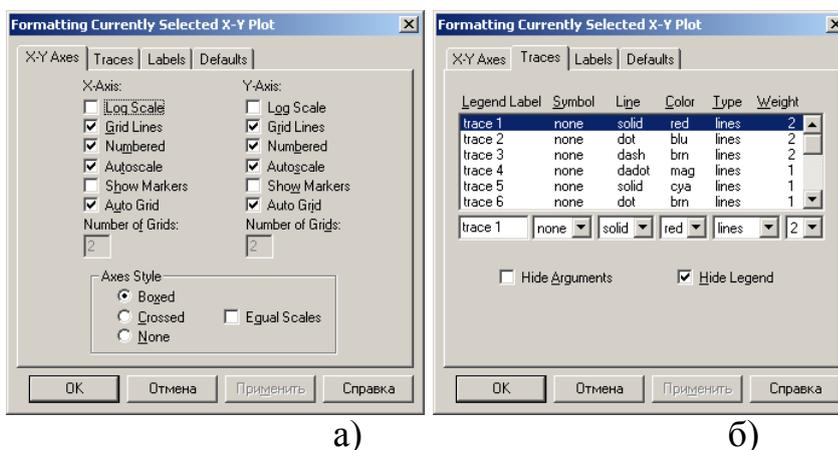
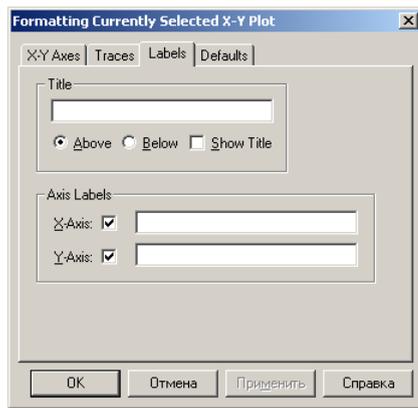
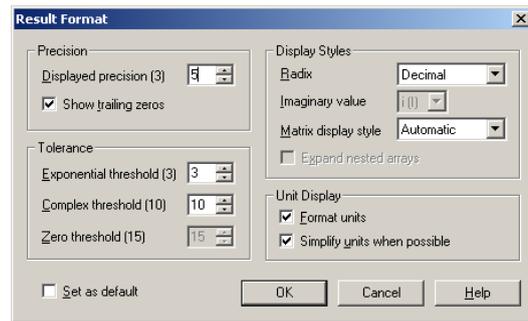


Рисунок 2 – Диалоговые окна для форматирования графиков



в)



г)

Рисунок 2 – Диалоговые окна для форматирования графиков

### Трехмерные графики

Для построения трехмерных графиков можно использовать наиболее простой и практически важный, быстрый метод построения трехмерного графика (QuickPlot). В его основе лежит тот же принцип, который используется и при быстром задании двумерной зависимости: пользователь определяет только вид функции, а все параметры построения, такие как шаг между узловыми точками, диапазон шкал осей и система координат, задаются автоматически системой.

Типы трехмерных графиков следующие:

Contour Plot - график линий уровня (график поверхности);

3D Bar Plot - график трехмерной гистограммы;

3D Scatter Plot - график множества точек;

Vector Field Plot - график векторного поля. График векторного поля немного отличается от других типов двумерных графиков. Его содержание заключается в построении некоторого вектора в каждой точке плоскости  $XU$ . Чтобы задать вектор на плоскости, необходимы два скалярных числа. Поэтому в Mathcad принято, что векторное поле задает комплексная матрица. Действительные части каждого ее элемента задают проекцию вектора на ось  $X$ , а мнимые - на ось  $U$ .

Чтобы создать трехмерный график, нужно нажать кнопку с изображением каждого из типов трехмерных графиков на панели инструментов Graph (Графики). В результате появится пустая область графика с тремя осями (рис. 3) и единым заполнителем в нижнем левом углу. В этот заполнитель ввести имя  $z$  функции  $z(x,y)$  двух переменных для быстрого построения трехмерного графика, или имя матричной переменной  $z$ , которая задает функцию  $z(x,y)$  на плоскости  $XU$ .

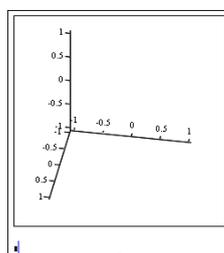


Рисунок 3 – Область для создания трехмерных графиков

### 3.2.1 Способ построения с использованием быстрого методу построения трехмерного графика

Последовательность создания трехмерного графика с использованием быстрого метода построения трехмерного графика (QuickPlot) следующая.

1. Сначала необходимо ввести графическую область трехмерного графика. Аналогично зависимости  $X$ - $Y$ , сделать это можно тремя стандартными способами: нажатием кнопки Surface Plot (Поверхность) панели Graph (Графические), использованием одноименной команды меню Insert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Ctrl+2.

Для построения трехмерных графиков существует только один маркер заполнения. В общем случае в нем должен быть прописан массив, который содержит координаты узловых точек по всем трем осям.

2. После того как графическая область введена, следует задать вид функции, которая определяет трехмерную область. В отличие от  $X$ - $Y$ -зависимостей, просто ввести ее выражения в маркер нельзя - при этом будет выдано сообщение об ошибке: This variable is undefined (Данная переменная не определена). В маркер графической области вводится имя заданной функции, для которой строится трехмерный график. Однако, в отличие от двумерного случая, прописанным должен быть лишь непосредственно текст имени, без переменных в скобках.

При использовании данной методики поверхность задается на стандартном интервале от -5 до 5 для переменных. Такой диапазон во многих случаях может быть неприемлемый. Для форматирования параметров графиков быстрого построения существует специальная вкладка Quick Plot Data (Данные графика быстрого построения) окна форматирования трехмерных графиков 3D-Plot Format. Открывается это окно двойным нажатием левой кнопки мыши на графической области или с помощью команды Format (Формат) ее контекстного меню (рис. 5).

Все параметры настройки графика быстрого построения расположены на вкладке Plot 1 (График 1). В общем случае таких вкладок может быть больше, это связано с тем, что на одной графической области может быть размещено несколько поверхностей. Чтобы это выполнить, просто вводятся через запятую имена функций, графики которых должны быть построены. Вкладка Plot 1 (График 1) содержит три меню настраивания, два из которых: Range 1 и Range 2 (Ряд 1 и Ряд 2), идентичны друг другу. Эти меню отвечают за характеристики сетки построения поверхности вдоль каждой из осей переменных (соответствие переменной ряда определяется последовательностью введения ее при задаче имени функции) и содержат следующие параметры настраивания:

– Start (Начало). В поле данного параметра можно произвольным образом задать начальную точку построения прямоугольника по данной оси.

– End (Конец). В поле данного параметра определяется конечная точка интервала.

– # of Grids (Количество линий сетки). Параметр определяет, на какое количество отрезков будет разбит интервал построения для выбранной

переменной (что отвечает числу отображенных линий сетки). Эта величина обратная шагу изменения переменной.

Аналогично двумерному случаю, интервал по каждой из осей переменных разбивается на заданное количество отрезков. Границы этих отрезков дают координаты узловых точек. При этом, если количество отрезков по  $X$  равняется  $N$ , а по  $Y$  -  $M$ , то для каждого значения  $X$  будет существовать  $M$  точек с разными координатами по  $Y$ , и, наоборот, каждому  $Y$  будет отвечать  $N$  значений  $X$ . Визуально это можно представить в виде сетки, которая определяется шагом по каждой из переменных, а в узлах находятся точки, относительно которых определяется функция.

Когда сетка разбиения задана, исчисляются значения функции в ее узлах. Если остановиться на этом этапе и визуализировать только точки, то будет построен так называемый точечный график (Data Points). Каждая точка соединяется с соседней при помощи отрезков прямых, при этом применяются сглаживание и другие графические эффекты, в результате чего, в зависимости от величины шагов сетки, выходит более или менее гладкая поверхность.

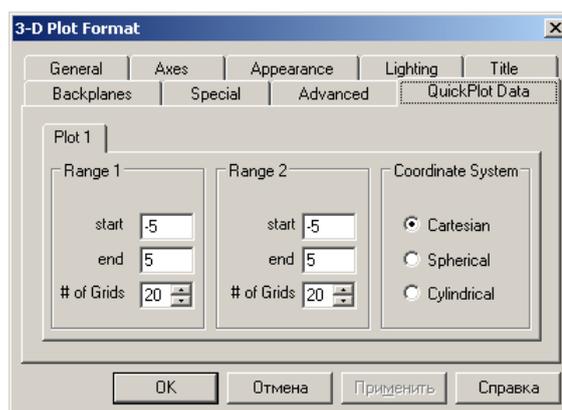


Рисунок 4 – Окно для форматирования трехмерных графиков

Третье меню вкладки Plot 1 (График 1) - Coordinate System (Система координат) определяет, в какой системе координат следует отобразить данную зависимость. Возможные следующие варианты:

- Cartesian (Декартова). График отображается в декартовой системе координат.

- Spherical (Сферическую). График отображается в сферической системе координат.

- Cylindrical (Цилиндрическая). График отображается в цилиндрической системе координат.

В диалоге 3-D Plot Format (Форматирование 3-D графика) доступно большое количество параметров, изменение которых способно повлиять на внешний вид графика. Они сгруппированы по принципу действия на нескольких вкладках.

Остановимся кратко на возможностях оформления трехмерных графиков.

*Изменение типа графика.* Чтобы изменить тип уже имеющегося графика (например построить вместо поверхности график линий уровня и т.д.), надо установить соответствующий переключатель в нижней части вкладки General (Общие) и нажать кнопку ОК. График будет преобразован (рис.5).

*Обращение графика.* Простейший способ ориентации системы координат с графиком в трехмерном пространстве - это перетаскивание ее указателем мыши. Можно перемещать при нажатой левой кнопке мыши указатель в границах графика, и будет видно, как вращается график.

*Изменение ориентации графика.* С помощью полей Rotation (Вращение), Tilt (Наклон) и Twist (Поворот) на вкладке General (Общие) определяют соответствующие углы вращения, наклона и поворота (в градусах) и тем самым задают направление всех трех осей координат в пространстве.

*Стиль осей* можно изменить с помощью группы переключателей Axes Style (Стиль осей) и задать один из следующих стилей осей координат:

- Perimeter (Периметр),
- Corner (Угол),
- None (Нет) - осы отсутствуют.

Если установить флажок Show Box (Показать куб), то координатное пространство будет изображено в виде куба.

*Масштабирование графика* - можно задать числовое значение масштаба в поле Zoom (Масштаб) вкладки General (Общие).

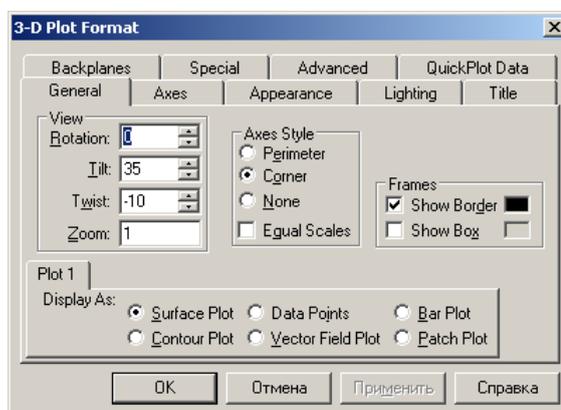


Рисунок 5 – Вкладка General (Display as) для изменения типа графика

Форматирование осей выполняется с использованием вкладки Axes (Оси) (рис.6). Вкладка Axes (Оси) содержит три вложенных вкладки, в которых задаются параметры для каждой из трех координатных осей. В частности, можно включить или отключить отображение линий сетки, нумерацию и задать диапазон по каждой из осей.

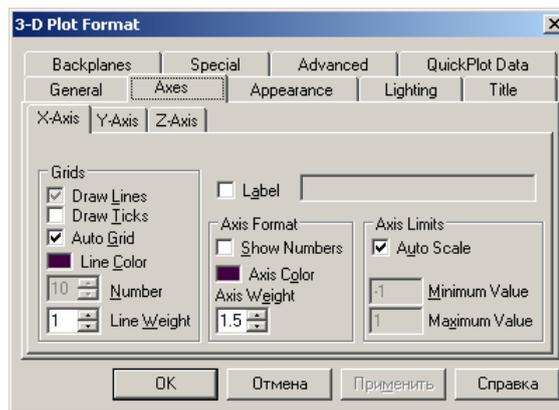


Рисунок 6 – Вкладка Axes (Оси) форматирования осей

С помощью еще одной вкладки — Backplanes (Плоскости заднего плана) (рис. 7) задается отображение проекций координатной сетки на три скрытые плоскости трехмерного графика.

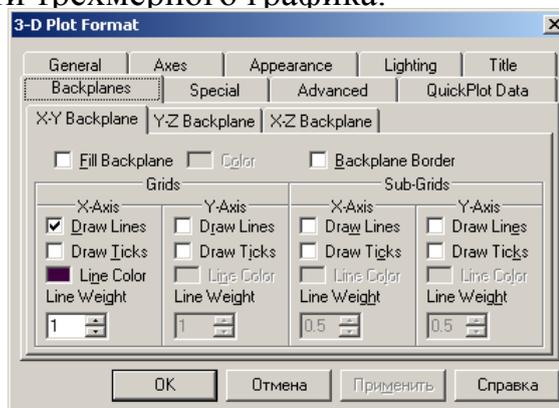


Рисунок 7 – Вкладка Axes (Оси) форматирования осей

С помощью вкладки Appearance (Оформление) (рис. 8) можно изменить стиль задания заливки линий для контурного и поверхностного графиков. При выборе переключателя Fill Surface (Заливка поверхности) из группы Fill Options (Опции заливки) можно получить доступ к опциям цвета (в группе Color Options). Если выбрать переключатель Solid Color (Один цвет), то получится однотонная заливка поверхности. Если установить переключатель Colormap (Цветовая схема), то поверхность или контурный график будут залиты разными цветами и оттенками, причем выбрать цветовую схему можно на вкладке Advanced (Дополнительно) (рис. 9).

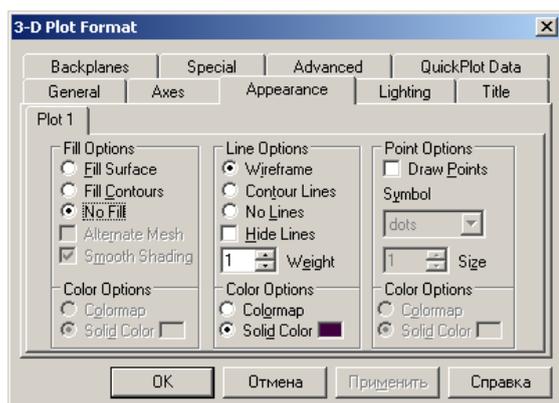


Рисунок 8 – Вкладка Appearance (Оформление) стиля задания заливки

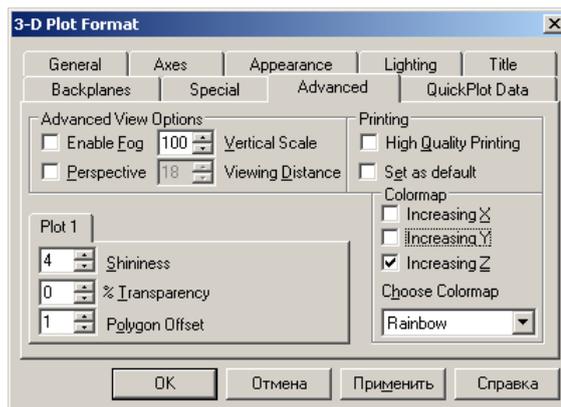


Рисунок 9 – Вкладка Advanced (Дополнительно) для задания цвета в спецэффектах

Заголовок графика можно изменить с помощью вкладки Title (Заголовок) (рис. 10).

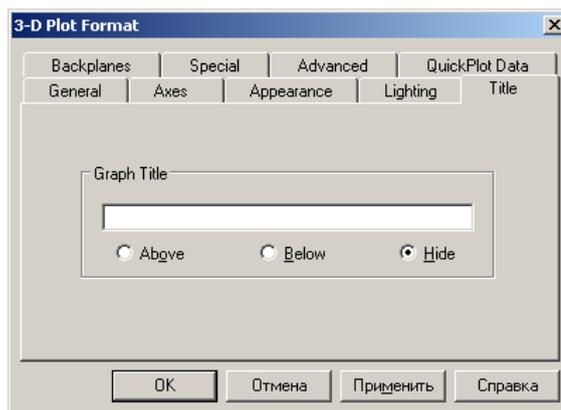


Рисунок 10 – Вкладка TITLE для изменения заголовка графика

### 3.2.2 Способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений

Существует еще один способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений, которая представляет собой таблицу из трех колонок: в первой будут расположены координаты точек по оси  $X$ , во второй - по оси  $Y$ , в третьей - по оси  $Z$ . В Mathcad существует специальная функция  $matrix(m,n,f)$  (матрица). Функция формирует матрицу, элементы которой равны значениям функции  $f(x,y)$ , исходя из того условия, что  $x=i$ ,  $y=j$  (т.е. переменные определяются равными соответствующим матричным индексам данного элемента). Количество строк создаваемой матрицы определяется в первом маркере имени функции (параметр  $m$ ), количество колонок - во втором (параметр  $n$ ).

Аналогично двумерному случаю, задать поверхность можно, используя оператор ранжированной переменной по готовым матрицам.

### 3.2.3 Способ построения с помощью специальной матричной функции *CreateMesh*

Можно создать график также с помощью специальной матричной функции *CreateMesh* (Создать сетку).

Функция *CreateMesh(F,s,sl,t,tl,sgrid,tgrid,fmap)* вводится в маркер графической области и имеет пустые маркеры, в которые последовательно вводятся:

- имя матрицы значений или функции  $F$ ;
- начальное значение первой переменной  $s$ ;
- начальное значение второй переменной  $sl$ ;
- конечное значение первой переменной  $t$ ;
- конечное значение второй переменной  $tl$ ;
- число линий сетки по первой переменной  $sgrid$ ;
- количество линий сетки по второй переменной  $tgrid$ ;
- карта отображения  $fmap$ .

Кроме поверхностей в пространстве можно задавать и разного рода линии. Для этого существует специальная функция *CreateSpace(F,t,tl,tgrid,fmap)* (Создать пространство). Она имеет пять маркеров, в которые последовательно вводятся имя массива данных или системы параметрических уравнений, начальное и конечное значения параметра, количество разбиюк промежутка параметра, карта отображения.

Параметрическое закручивание разрешает создавать графики, которые заданы в параметрической форме. Последовательность действий при использовании алгоритма параметрического закручивания следующая.

1. Задать уравнение любой функции  $f(x)$ .
2. Задать систему параметрического закручивания и соединить ее в один массив:

$$\begin{aligned}A(u, v) &:= u, \\B(u, v) &:= f(u) \cos(v), \\C(u, v) &:= f(u) \sin(v), \\M(u, v) &:= \begin{pmatrix} A(u, v) \\ B(u, v) \\ C(u, v) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Внести в маркер следующую запись: *CreateMesh(M, s, sl, t, tl, sgrid, tgrid)*.

## ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

С помощью встроенных функций MathCad матрицы можно объединять, выделять в них подмассивы, определять размеры массивов, максимальные, минимальные значения, нахождение собственных чисел и векторов. Для матриц определены следующие операции: добавление, произведение, обращение, транспонирование, и т.п..

Создать матрицу можно следующим образом:

записать оператор присваивания, для введения правой части использовать команду Insert/Matrix или на панели инструментов Matrix. В окне, которое раскроется, задать число строк и столбцов матрицы. Вектор является матрицей с одним столбцом. Ввести значение элементов матрицы в соответствующие места. Дальше можно выполнять все необходимые операции с матрицами

Для работы с элементами матрицы используются индексы элементов. Нумерация строк и столбцов матрицы начинается из нуля. Индекс элемента определяется на панели инструментов Matrix кнопкой Subscript (рис.1,в), например  $M_{n,k}$ . Два индекса, которые определяют элемент матрицы, отделяются запятой. Номер столбца матрицы отображается как верхний индекс, который заключен в угловые скобки, для чего используется кнопка Column на панели инструментов Matrix, например,  $M_{<1>}$ .

Для проведения операций с матрицами используется меню Symbolic и команда Matrix (рис. 12).

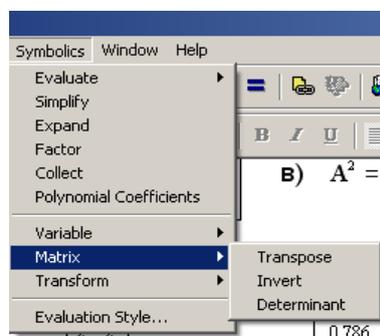


Рисунок 12 – Меню Symbolic для работы с матрицами в символьном виде.

## НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Для числового поиска корней уравнения в MathCad используется встроенная функция *root*. Она позволяет решать уравнение вида  $f(x)=0$ , где  $f(x)$ -уравнение, корни которого необходимо найти,  $x$  - неизвестная. Использование функции *root* требует задания начального приближения.

Функция *polyroot* возвращает вектор, который имеет все корни уравнения, коэффициенты которого задаются вектором  $v$ . Коэффициенты у вектора  $v$  располагаются в порядке возрастания степеней в уравнении.

Существует возможность символьного решения уравнения. Для этого необходимо обратиться к меню Symbolic/Variable/Solve. Корни уравнения выводят в виде вектора.

Можно также находить решение уравнения графически. Графическое решение заключается в определении по графику функции, которая отвечает левой части уравнения, при какой величине аргумента данная функция принимает значение, равное правой части уравнения.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на две основных группы: прямые (метод Крамера, метод Гауса, и т.п.) и итеративные методы. При использовании прямых методов расчеты можно вести как численно, так и символично. Итеративные методы применяются в численных решениях.

Для решения систем линейных и нелинейных уравнений используется "блок решений", который начинается из ключевого слова *given* и заканчивается вызовом функции *find*. Между ними находится уравнение. Всем неизвестным в уравнении должны быть присвоены начальные значения. В уравнении, для которого необходимо найти решение, нужно использовать знак логического равенства = на панели инструментов Evaluation. Как аргументы в функции должны быть неизвестные, которые необходимо найти.

Решение системы линейных уравнений с помощью встроенной функции *lsolve(A,b)* возвращает вектор решений *b*. Матрица *A* - квадратная невырожденная, вектор *b* - вектор правых частей в системе уравнений.

С помощью символьного процессора MathCad можно получать аналитические решения системы уравнений, используя оператор *solve*. В этом случае система должна быть занесена в виде вектора в левый маркер оператора. Переменные, значения которых отыскиваются, следует вводить через запятую в правый маркер оператора *solve*. Ответ будет возвращен в виде матрицы, в строках которой будут записаны найденные значения неизвестных системы уравнений.

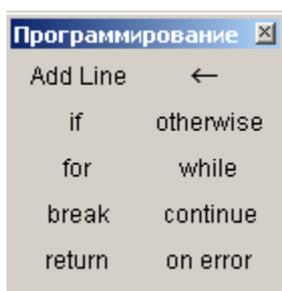
Аналитические решения можно также получить с помощью "блока решений", который начинается из ключевого слова *given*.

Приближенные решения системы уравнений можно получить с использованием встроенной функции *minerr(x1,...)*. Эта функция подобная по своей работе к функции *find*, однако она имеет другие условия для завершения итеративного процесса поиска решений. Функция *minerr* позволяет находить решение в том случае, когда их не находит функция *find*.

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ В MATHCAD

Для написания программ в среде MathCad [4,6] существует специальная панель Programming (Программирование) (рис.16, а), она относится к панели Math (Математические) (рис.16, б).

Язык программирования MathCad имеет предельно малое количество операторов (рис. 16, а). Чтобы написать программу, прежде всего для нее должен быть создан блок. Выглядит он как черная вертикальная линия с маркерами, в которые записывают те или иные выражения алгоритма.



а)



б)

Рисунок 16—Панель программирования

Чтобы построить единичный элемент программного блока, используется кнопка команды Add Line (Добавить линию) панели Programming (Программирование). При этом в области курсора появится

следующий объект:  в который можно занести две строки программы. Для создания большего числа строк программы необходимо последовательно нажимать несколько раз соответствующую кнопку на панели Programming. Программный блок можно создать и внутри уже заданного блока.

Для присвоения значений переменным и функциям в MathCad используется специальный оператор:  $\leftarrow$  (Local Definition - Локальное присваивание), расположенный на панели Programming (Программирование). Использовать оператор обычного присваивания  $:=$  в программах нельзя. Локальные переменные и функции имеют приоритет над глобальными в рамках родной программы. Несколько переменных можно объявлять в одной строке через запятую.

Практически любая программа создается с использованием специальных управляющих операторов, таких как оператор цикла **for** или оператора условия **if**.

Чтобы задать нужный оператор, используются соответствующие кнопки панели Programming (Программирование). Просто набрать оператор из клавиатуры нельзя - он будет воспринят системой MathCad как неизвестная функция. Такие операторы как: **if**, **for**, **while**, активируют код, расположенный в левом верхнем маркере, в том случае, если выполняется условие в правом. Для задачи условия используются также операторы панели Boolean (Логические). Можно задать и комплекс условий.

С помощью оператора простого цикла **for** можно организовать выполнение операции или проверку условия для ряда конкретных значений переменной. Оператор **for** имеет три маркера: в двух верхних маркерах, соединенных символом принадлежности, задается имя переменной, по которой организуется цикл, и ряд принятых ею значений. В нижнем маркере определяется операция или комплекс операций, которые должны быть выполнены для каждого значения переменной.

С помощью второго оператора цикла **while** (Пока) можно организовать цикл, который будет работать до тех пор, пока некоторое условие будет выполняться. Оператор **while** имеет два маркера, в которые вводятся соответственно условия работы цикла и выражение для операций, которые будут выполняться на каждом шаге цикла **while**. Количество шагов выполнения цикла не нужно определять явным образом.

Если в некоторых ситуациях при работе программы необходимо прервать работу цикла, для этого надо использовать оператор **break** (Прервать). Этот оператор почти всегда работает с оператором **if** (Если) или **on error** (Перехват ошибок).

Программный оператор условия **if** (Если) используется практически во всех создаваемых алгоритмах. Условный оператор **if** имеет два маркера: **if**. В правый маркер вводится условие, в левый - операция, которая выполняется в случае, если условие выполняется (если же оно не выполняется, то программа, пропускает данный фрагмент). В маркер оператора может быть внесено несколько условий.

Если алгоритм имеет несколько условий, при этом выполнение одного из них может привести к невыполнению или ошибке в других операторах условий, то можно использовать специальный оператор **continue** (Продолжить). Его применение аналогично применению оператору **break** (Прервать).

Оператор **otherwise** (Иначе) предназначен для определения действия, которое должно быть выполнено, если условие оператора **if** (Если) окажется ошибочным. Одновременно может быть использовано несколько условных операторов **if** (Если). Оператор **otherwise** (Иначе) в таком случае будет задействован, если не выполнятся условия всех операторов **if** (Если).

С помощью оператора **return** (Возвратить) можно прервать работу программы и вернуть некоторое значение. Этот оператор используется при ошибочной ситуации в программе.

В MathCad существует возможность использовать специальный оператор **on error** (Перехват ошибок). Он дает возможность в программах избегать ошибок и обходить их. Этот оператор по синтаксису полностью отвечает оператору **if**.

## Практическая работа №1

### Основы работы в mathcad

#### Часть 1.

#### Нахождение корней уравнения в MathCad

**Цель работы:** нахождение корней уравнения в программе MathCad с использованием встроенных функций *root*, *polyroots*, символьного решения.

#### Указания к выполнению лабораторной работы:

**I** Нахождение корней уравнения в программе MathCad с использованием встроенной функции *root*

1. Запустить программу MathCad .
2. Записать на рабочем листе MathCad вид функции  $f(x)$ , для которой необходимо найти на заданном интервале корни.

3. Создать цикл из точек интервала, на котором определяются корни, и вычислить в этих точках функцию  $f(x)$ . Построить график функции  $f(x)$  и график функции  $x=0$  (т.е. ось  $x$ ).

4. Определить точки пересечения двух кривых  $f(x)$  и  $x=0$ , которые будут приближением к корням уравнения.

4.1. Использовать для определения на графике значений корней в контекстном меню (рис.17, а) опцию Trace (рис. 17,б), установить флажок в окне Track Data Point.

4.2. Подвести курсор мыши к точкам пересечения кривых, координаты точек пересечения кривых, т.е. корни, будут представлены в окнах X-Value и Y- Value, а на графике отобразится вертикальная прямая.

5. Задать для независимой переменной  $x$  начальное приближение, которое выбирается как значение точки пересечения кривых  $f(x)$  и  $x=0$ . Обратиться ко встроенной в MathCad функции  $root(f(x), x)$  (функция  $root$  возвращает значение независимой переменной  $x$ , для которой  $f(x)$  равняется 0) и найти корень  $x_1$ .

6. Найти второй ( $x_2$ ) и третий ( $x_3$ ) корни уравнения  $f(x)=0$  (уравнение третьей степени имеет не больше трех действительных корней), задав для них соответственно их начальные значения как координаты точек пересечения кривых  $f(x)$  и  $x=0$  и используя функцию  $root$ .

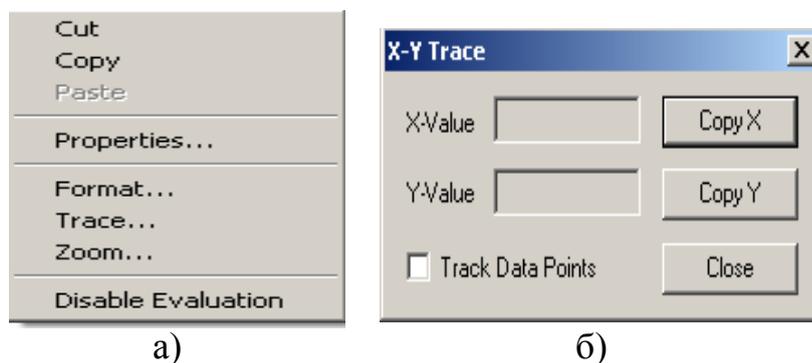


Рисунок 17 – Диалоговые окна для определения координат точек пересечения кривых

**II** Нахождение корней уравнения в программе MathCad с использованием встроенной функции  $polyroots$ , которая возвращает вектор, имеющий все корни уравнения, коэффициенты уравнения при этом задаются вектором.

1. Записать на рабочем листе MathCad вид функции  $f(x)$ , для которой необходимо найти на заданном интервале корни.

2. Записать как вектор  $v$  все коэффициенты уравнения, расположить их в порядке увеличения степеней.

3. Найти корни, обратившись ко встроенной функции  $r:=polyroots(v)$ , результат будет получено относительно трансформированного вектора  $r^T$ .

4. Для интервала нахождения корня и количества элементов вектора  $r^T$  создать соответствующие циклы и вычислить значение функции в точках цикла.

5. Построить график функции в точках цикла, а также в найденных точках корней, в которых функция будет иметь значения, равные нулю.

**III** Нахождение корней уравнения в программе MathCad с использованием символьных решений уравнений.

1. Ввести левую часть уравнения.
  2. Ввести знак равенства с использованием панели управления Evaluation (Выражения) или с помощью нажатия клавиш Ctrl + =.
  3. За знаком равенства ввести правую часть уравнения.
  4. Выделить переменную, относительно которой решается уравнение.
  5. Выбрать команду Symbolic/Variable/Solve.
- По окончанию решения корни уравнения выводятся в виде вектора.

**IV** Найти приближенное решение с использованием функции  $minerr(x1, \dots)$ .

1. Задать приближение последовательно для первого корня  $x:=1$ .
2. Ввести ключевое слово *given* (дано), из которого начинается блок решений.
3. Записать уравнение, используя знак логического равенства между правой и левой частями уравнения.
4. Обратиться к функции  $minerr(x)$ . Корень будет найдено.

Таблица 1.1 – Варианты заданий к лабораторной работе № 1

№ варианта	Интервал нахождения корней	Уравнение
1	2	3
1	[-1; 3]	$x^3 - 2,92x^2 + 1,4355x + 0,791 = 0$
2	[-2; 3]	$x^3 - 2,56x^2 - 1,325x + 4,395 = 0$
3	[-3,5; 2,5]	$x^3 + 2,84x^2 - 5,606x - 14,766 = 0$
4	[-2,5; 2,5]	$x^3 + 1,41x^2 - 5,472x - 7,38 = 0$

Продолжение табл.1.1

1	2	3
5	[-1,6; 1,1]	$x^3 + 0,85x^2 - 0,432x + 0,044 = 0$
6	[-1,6; 1,6]	$x^3 - 0,12x^2 - 1,478x + 0,192 = 0$
7	[-1,6; 0,8]	$x^3 + 0,77x^2 - 0,251x - 0,017 = 0$
8	[-1,4; 1]	$x^3 + 0,88x^2 - 0,3999x - 0,0376 = 0$
9	[-1,4; 2,5]	$x^3 + 0,78x^2 - 0,827x - 0,1467 = 0$
10	[-2,6; 1,4]	$x^3 + 2,28x^2 - 1,9347x - 3,90757 = 0$
11	[-2,6; 3,2]	$x^3 - 0,805x^2 - 7x + 2,77 = 0$
12	[-3; 3]	$x^3 - 0,345x^2 - 5,569x + 3,15 = 0$
13	[-2; 3,4]	$x^3 - 3,335x^2 - 1,679x + 8,05 = 0$
14	[-1; 2,8]	$x^3 - 2,5x^2 + 0,0099x + 0,517 = 0$
15	[-1,2; 3]	$x^3 - 3x^2 + 0,569x + 1,599 = 0$
16	[-2,5; 2,5]	$x^3 - 2,2x^2 + 0,82x + 0,23 = 0$
17	[-1,2; 4,6]	$x^3 - 5x^2 + 0,903x + 6,77 = 0$
18	[-1; 7,4]	$x^3 - 7,5x^2 + 0,499x + 4,12 = 0$
19	[-1,6; 9]	$x^3 - 7,8x^2 + 0,899x + 8,1 = 0$

20	[-3,4; 2]	$x^3+2x^2-4,9x-3,22=0$
21	[-3,4; 1,2]	$x^3+3x^2-0,939x-1,801=0$
22	[-4,6; 3,0]	$x^3+5,3x^2+0,6799x-13,17=0$
23	[-2,4; 8,2]	$x^3-6,2x^2-12,999x+11,1=0$
24	[-3,2; 2,7]	$x^3-0,34x^2-4,339x-0,09=0$
25	[-1; 3]	$x^3-1,5x^2+0,129x+0,07=0$
26	[-1; 3]	$x^3-5,5x^2+2,79x+0,11=0$
27	[-1; 3]	$x^3-5,7x^2-6,219x-2,03=0$
28	[-1; 3]	$x^3-3,78x^2-7,459x-4,13=0$
29	[-1; 3]	$x^3-5x^2-9,9119x+0,01=0$
30	[-1; 3]	$x^3-7x^2-1,339x-7,55=0$

### Пример

I Для уравнения  $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044 \cdot x + 0.139$  найти корни на интервале  $[-1, 1]$ , шаг изменения переменной  $x$  равен 0.1.

1 Записать цикл из точек интервала  $x := -1, -0.9..1$ .

2 Записать функции  $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044 \cdot x + 0.139$  и  $x0=0$ .

3 Построить графики для этих функций.

4 Определить на графике точки пересечения кривых  $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044 \cdot x + 0.139$  и  $x0=0$ .

5 Задать как приближение значения точек пересечения  $x1, x2, x3$ . В примере  $x1=-0.9, x2=0.2, x3=0.7$ .

6 Вычислить значение корней с помощью формул:  $root(f(x1),x1)$ ,  $root(f(x2),x2)$ ,  $root(f(x3),x3)$ . Полученные значения корней такие:  $x1=-0.92, x2=0.21, x3=0.721$  (рис. 18).

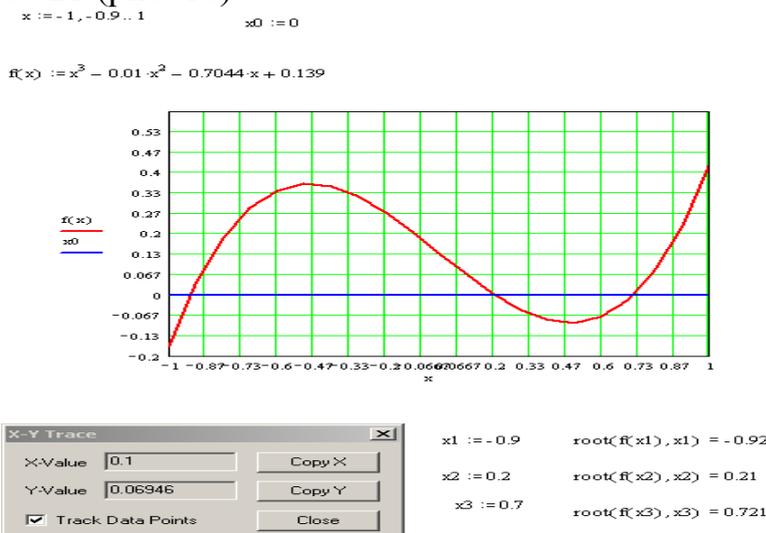


Рисунок 18 – Результат нахождения корней с использованием функции *root*

II Для уравнения  $f(x) = x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55$  найти корни на интервале  $[-1.1, 7.1]$ , шаг изменения переменной  $x$  равен 0.1.

1. Создать вектор из коэффициентов уравнения, используя панель управления Matrix (Матрица) (рис.19) и задав один столбец и четыре строки для коэффициентов уравнения.

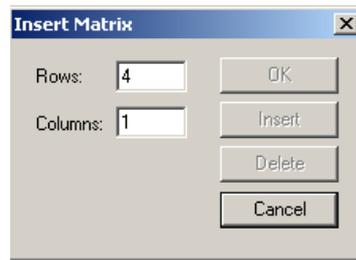


Рисунок 19 – Диалоговое окно для определения вектора из коэффициентов уравнения

Вектор из коэффициентов уравнения будет иметь следующий вид

$$v := \begin{bmatrix} 7.55 \\ -1.339 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. С помощью встроенной функции  $r := \text{polyroots}(v)$  найти корни уравнения и представить их в виде вектора  $r^T$ , транспонированного по отношению к  $r$ , то есть преобразованного из столбца в строку.

3. Создать циклы для переменной  $x$  и количества найденных корней:

$$x := -1.1, -1..7.1$$

$$j := 0, 1..2.$$

4. Построить графики для функции и определить функцию в точках корней. В точках корней значения функции равны нулю.

5. Определить значения корней на графике (рис. 20).

$$f(x) := x^3 - 7x^2 - 1.339x + 7.55$$

$$v := \begin{bmatrix} 7.55 \\ -1.339 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$r^T = (-1.055 \quad 1.017 \quad 7.038)$$

$$x := -1.1, -1..7.1$$

$$j := 0, 1..2$$

$r_j$	$f(x)$
-1.055	-0.778
1.017	0.889
7.038	2.356
	3.629
	4.714
	5.617
	6.345
	6.902
	7.295
	7.53
	7.613
	7.55
	7.347
	7.01
	6.545
	5.958

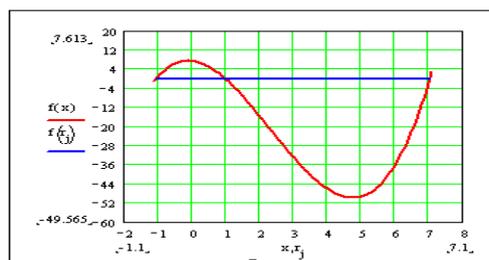


Рисунок 20 – Результат нахождения корней с использованием функции *polyroots*

**III** Для уравнения  $f(x) = x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55$  найти корни с использованием символьных решений уравнений.

1. Записать левую часть уравнения

$$x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55.$$

2. Поставить логический знак « $\Rightarrow$ » и в правой части записать 0.

3. Выделить переменную  $x$ .

4. Обратиться в главном меню MathCad к команде Symbolic/Variable/Solve.

Найдены корни уравнения запишутся в виде вектора:

$$x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1.0548347262813942430 \\ 1.0170068872772705837 \\ 7.0378278390041236593 \end{bmatrix}$$

**IV** Найти приближенное решение вышеприведенного уравнения с использованием функции *minerr(x1, ...)*.

1. Задать приближение последовательно для первого корня  $x:=1$ .

2. Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.

3. Записать уравнение, используя знак логического равенства между правой и левой частью уравнения.

4. Обратиться к функции *minerr(x)*. Корень будет найдено.

5. Аналогические действия выполнить для двух других корней уравнения, поскольку уравнения третьей степени имеет не больше трех корней.

$$\begin{array}{l} x := 1 \\ \text{Given} \\ x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339x + 7.55 = 0 \\ \text{minerr}(x) = 1.017 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x := 7 \\ \text{Given} \\ x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339x + 7.55 = 0 \\ \text{Minerr}(x) = 7.038 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x := -1 \\ \text{Given} \\ x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339x + 7.55 = 0 \\ \text{Minerr}(x) = -1.055 \end{array}$$

## Часть 2.

### Нахождение решений системы линейных уравнений в MathCad

**Цель работы:** нахождение решений системы линейных уравнений в программе MathCad .

#### Указания к выполнению лабораторной работы:

**I** Найти решение системы линейных уравнений с использованием функции *soln*.

- 1 Запустить программу MathCad.
- 2 Создать матрицу A из коэффициентов при неизвестных.
- 3 Создать вектор b из свободных членов.
- 4 Обратиться к встроенной программе решения линейных уравнений *soln* и записать  $soln_1 := A^{-1} \cdot b$ .
- 5 Получить решение линейного уравнения у векторному виде

$$soln_1 = \begin{pmatrix} | \\ | \\ \dots \\ | \end{pmatrix} \cdot$$

**II** Найти решение системы линейных уравнений с использованием так званого «блоку решений».

- 1 Задать начальные значения переменным, которые есть в уравнении.
- 2 Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.
- 3 Записать уравнение, используя знак логического равенства между правой и левой частью уравнения из панели управления Evaluation (Выражения).
- 4 Ввести ключевое слово *find* (найти), которым заканчивается блок решений.

**III** Найти решение вышеприведенной системы уравнений с использованием функции *lsolve*.

- 1 Создать матрицу A из коэффициентов при неизвестных.
- 2 Создать вектор b из свободных членов.
- 4 Обратиться к встроенной программе решения линейных уравнений *lsolve* и записать  $lsolve(A, b)$ .
- 5 Получить результат решения линейного уравнения в векторном виде

$$lsolve := \begin{pmatrix} | \\ | \\ \dots \\ | \end{pmatrix} \cdot$$

**IV** Найти приближенное решение с использованием функции *minerr*(x1,...).

1 Задать приближение последовательно для значений переменной  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

2 Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.

3 Записать систему уравнений, используя знак логического равенства между правой и левой частями каждого уравнения.

4 Обратиться к функции *minerr*(  $x_1, x_2, \dots$ ). Значения неизвестных будут найдены.

Таблица 3.1 – Варианты заданий к лабораторной работе № 3

№ варианта	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены
	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$B_1$
	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$B_2$
	$a_{31}$	$a_{23}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$B_3$
	$a_{41}$	$a_{24}$	$a_{34}$	$a_{44}$	$B_4$
1	2	3	4	5	6
1	9	5	7	4	0
	4	6	7	8	6
	5	8	6	7	3
	5	6	7	8	7
2	9	6	3	8	3
	4	6	7	4	1
	2	3	5	3	4
	4	8	3	7	2
3	2	3	2	5	3
	5	2	5	7	2
	4	2	7	1	3
	7	5	1	4	2
4	1	4	2	5	8
	4	4	5	3	6
	1	2	6	8	7
	3	7	3	2	9
5	9	6	3	8	3
	4	6	7	4	8
	2	3	5	3	5
	4	8	3	7	9
6	2	4	7	4	2
	4	1	6	2	0
	8	3	6	7	3
	6	3	5	7	1
7	3	3	4	7	3
	2	6	4	6	4
	3	4	5	6	8

№ варианта	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены
	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	a <sub>13</sub>	a <sub>14</sub>	B <sub>1</sub>
	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>24</sub>	B <sub>2</sub>
	a <sub>31</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>33</sub>	a <sub>34</sub>	B <sub>3</sub>
	a <sub>41</sub>	a <sub>24</sub>	a <sub>34</sub>	a <sub>44</sub>	B <sub>4</sub>
1	2	3	4	5	6
	1	9	3	5	2
8	2	1	5	2	1
	5	2	2	6	3
	2	2	1	2	0
	1	3	3	1	2
9	7	6	2	7	3
	4	9	5	5	2
	2	3	4	4	0
	1	5	6	6	2
10	3	6	5	2	3
	4	6	3	5	0
	2	3	2	6	4
	2	4	3	6	3
11	0,12	-0,43	0,14	0,64	-0,17
	-0,07	0,34	-0,72	0,32	0,62
	1,18	-0,08	-0,25	0,43	1,12
	1,17	0,53	-0,84	-0,53	1,15
12	0,12	-0,43	0,14	0,64	-0,17
	-0,07	0,34	-0,72	0,32	0,62
	1,18	-0,08	-0,25	0,43	1,12
	1,17	0,53	-0,84	-0,53	1,15
13	3,7	5,6	9,5	2	13
	4	3,36	31,1	1,5	0
	2	7,93	4,2	6,3	4,4
	2	42,7	3,7	6,2	3
14	1,3	1,6	5	2,2	3
	4,4	6,7	13	2,5	0
	2,8	0,73	12	67,8	4
	2	3,4	13	6	3
15	5,3	1,6	5,5	2	3,3
	4,1	6,4	3,9	5	0
	2,1	3,3	2,04	6	4,9
	2	4	3	6	3,1
16	3	6	5	0,2	3
	4	6	8,3	5,3	0
	2	3	2,6	6,1	4,1
	2	4	0,93	6	3,8
17	3	6	5	2	34,7

№ варианта	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены
	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	a <sub>13</sub>	a <sub>14</sub>	B <sub>1</sub>
	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>24</sub>	B <sub>2</sub>
	a <sub>31</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>33</sub>	a <sub>34</sub>	B <sub>3</sub>
	a <sub>41</sub>	a <sub>24</sub>	a <sub>34</sub>	a <sub>44</sub>	B <sub>4</sub>
1	2	3	4	5	6
	4	6	3,6	5	0
	2	3,4	2	6	4,2
	2	44,7	3	6	3
18	3	6	5,1	0,2	4
	4	6	3,4	5,34	3
	2	3	2,7	6,7	4
	2	4	3,3	6	7
19	23	6	5	2,5	1,3
	4	6	3	5,2	0,78
	12	3	2	6,11	4,2
	12	4	3	6,78	3,76
20	1	5	5	2,3	3
	8	2	3,4	2,5	0
	6	3	0,2	6	4
	2	4	3	5	3
21	3	6	1,25	2	3
	2	5	3,3	8,2	2
	5	2	1,2	2	4
	2	4	1,3	9	2
22	1	6	5,9	2	3
	7	6,6	3	5	0
	3	3,3	2,1	6	2
	2	4,8	3	6	8
23	3	16	5	12	3
	0,4	6	13	5	0
	2	3	2	6	14
	0,2	4	3	16	3
24	1,3	16	1,5	2,22	3,2
	5	8	3,4	5,55	1,3
	3	3,3	2,2	6,77	4
	2	4,9	3,6	6,88	3
25	3	6	15	2	3
	4	6	3	5	0,4
	2	3	12	6	14
	2	4	3	6	0,3
26	3,3	7,6	5,5	2	3
	5,4	7	13	5	0
	9,2	4	2	6	4

№ варианта	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены
	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	a <sub>13</sub>	a <sub>14</sub>	B <sub>1</sub>
	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>24</sub>	B <sub>2</sub>
	a <sub>31</sub>	a <sub>23</sub>	a <sub>33</sub>	a <sub>34</sub>	B <sub>3</sub>
	a <sub>41</sub>	a <sub>24</sub>	a <sub>34</sub>	a <sub>44</sub>	B <sub>4</sub>
1	2	3	4	5	6
	3,2	4	3	6	3
27	3	6	5	2	3
	0,44	9	3	5	0
	2	2	2	6	4
	0,67	5	3	6	3
28	3,35	3	5,3	2	3
	4,22	6,7	3,5	5	0
	2,8	3,8	2,9	6	4
	2,34	4	3,44	6	3
29	3	6	5,23	2	3
	4	6	11	5	0
	2	3	18	6	4
	2	4	13	6	3
30	13,4	6,33	5,1	2,11	3,33
	4,66	6,1	3,33	5,44	0,11
	2,22	6	2,55	6,33	4,44
	2,98	8	3,78	6,11	3,33

### Пример

I Найти решение системы уравнений с использованием функции *soln*

$$\begin{cases} 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3. \end{cases}$$

1 Создать матрицу A

$$A := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

2 Создать вектор b

$$b := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}.$$

3 Найти решение системы, используя функцию *soln*

$$\text{soln}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4 Результат решения

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{soln}_1 := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \text{soln}_1 = \begin{bmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II Найти решение вышеприведенной системы уравнений с использованием так званого «блоку решений»

1 Задать начальные значения переменным, которые присутствуют в уравнении

$$x=0; y=0; z=0.$$

2 Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.

3 Записать уравнение, используя знак логического равенства между правой и левой частями уравнения из панели управления Evaluation (Выражения).

$$\begin{cases} 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3. \end{cases}$$

4 Ввести ключевое слово *find* (найти), которым заканчивается блок решений.

$$\text{find}(x,y,z) =$$

5 Результат решения

$$x := 0 \quad y := 0 \quad z := 0$$

**given**

$$2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1$$

$$2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1$$

$$5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3$$

$$\text{find}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III Найти решение вышеприведенной системы уравнений с использованием функции *lsolve*.

1 Создать матрицу A

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2 Создать вектор b

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3 Найти решение системы, используя функцию *lsolve*:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**IV** Найти решение вышеприведенной системы уравнений с использованием функции *minerr* (*x,y,z*).

1 Задать начальные условия для неизвестных, например,  $x=1, y=1, z=1$ .

2 Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.

3 Записать уравнения, используя знак логического равенства между правой и левой частью уравнения из панели.

4 Обратиться к функции *minerr* (*x,y,z*). Решение системы уравнений будет найдено.

$$\begin{array}{l} x := 1 \quad z := 1 \quad y := 1 \\ \text{given} \\ 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3 \\ \text{minerr}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

#### Литература:

1. Охорзин, В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 144 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/53760>

2. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 352 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/294>

3. Плис А. И., Сливина Н. А. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999. — 656 с.

4. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 496 с.

## Практическая работа № 2

### Постановка и решение задачи линейного программирования

#### Решение задачи ЛП графическим методом

**Цель работы:** решение оптимальных задач линейного программирования с использованием пакетов Excel и MathCAD; нахождение оптимальных решений задач линейного программирования графическим методом

#### Задание.

- 1) построить экономико-математическую модель задачи:
  - составить целевую функцию;
  - записать систему ограничений.
- 2) Решить задачу максимизации стандартными средствами Excel
- 3) Решить задачу максимизации стандартными средствами MathCAD.
- 4) решить ЗЛП графическим методом.
- 5) решить ЗЛП с использованием любого языка программирования.
- 6) сделать выводы

#### Варианты для выполнения лабораторной работы.

##### *Вариант 1*

Выполнить заказ по производству 32 изделий И1 и 4 изделий И2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий И1 и И2 составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады Б2 — соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени — 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады Б2 — 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные

затраты на выполнение заказа.

### **Вариант 2**

Для производства столов, стульев и шкафов мебельная фабрика использует два вида древесины. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Определить сколько изделий мебели каждого вида фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие			Общее количество ресурсов
	Стол	Стул	Шкаф	
Древесина I вида, м <sup>3</sup>	0,3	0,1	0,4	80
Древесина II вида, м <sup>3</sup>	0,1	0,05	0,5	120
Трудоёмкость, чел.-ч	1,3	0,3	2,5	483,5
Прибыль от реализации одного изделия, руб.	21	25	35	

### **Вариант 3**

При изготовлении изделий И1 и И2 используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия И1 требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия И2 требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия И1 составляет 6 руб. и от единицы изделия И2 – 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

### **Вариант 4**

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов П1 и П2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта П1 – 2 руб., П2 – 3 руб. Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

### **Вариант 5**

Для изготовления трёх видов продукции А, В и С используют токарное,

фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия вида, станко-ч			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Фрезерное	5	6	8	210
Токарное	3	4	2	320
Сварочное	7	9	4	250
Шлифовальное	2	5	6	160
Прибыль, руб.	8	11	15	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

### **Вариант 6**

На заводе выпускают изделия четырех типов. От реализации 1 ед. каждого изделия завод получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 д.е. На изготовление изделий расходуются ресурсы трех типов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в следующей таблице

Спланируйте производство изделий так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу изделия				Запасы ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

### **Вариант 7**

При производстве карамели на кондитерской фабрике используются сахарный песок, патока, фруктовое пюре и вкусовые добавки. Нормы расхода сырья каждого вида для производства 1 т карамели "Абрикос"(А), "Вишня"(В) и "Клубника"(К) приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели, т			Общее количество сырья, т
	А	В	К	
Сахарный песок	0,7	0,6	0,8	900
Патока	0,45	0,5	0,3	700
Фруктовое пюре	0,1	0,2	0,15	250
Вкусовые добавки	0,002	0,005	0,003	16
Прибыль, руб.	1000	1200	1350	

Требуется определить, план выпуска карамели, чтобы прибыль от её реализации была максимальной.

### **Вариант 8**

При откорме лосей каждое животное ежедневно должно получить не менее 18 ед. белков, не менее 72 ед. углеводов и не менее 24 ед. жиров. При откорме могут использоваться три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в таблице.

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		
	I	II	III
Белки	3	4	3
Углеводы	13	20	9
Жиры	5	4	3
Цена 1 кг корма, руб.	21	25	35

### **Вариант 9**

При откорме каждое животное должно получать не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма 1	корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида — 4 д.е., второго ~ 6 д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

### **Вариант 10**

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь — 100 ед., труд — 120 ед., тяга — 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции

П1, П2, П3 и П4, Организация производства характеризуется следующей таблицей:

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
$P_1$	2	2	2	1
$P_2$	3	1	3	4
$P_3$	4	2	1	3
$P_4$	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

### **Вариант 11**

Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа - 3 т, проволоки ~ 18 т. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д. е., второго — 4 д. е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

### **Вариант 12**

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице:

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Сформулировать экономико-математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

### **Вариант 13**

Из трех продуктов - I, II, III составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. — вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	А	В	С	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте наиболее дешевую смесь.

#### **Вариант 14**

В институте проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному студенту дано следующее поручение:

- купить акварельной краски по цене 30 д. е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д. е. за коробку, линейки по цене 12 д. е., блокноты по цене 10 д. е.;
- красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов - столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не менее 300 д. е.

В каком количестве студент должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

#### **Вариант 15**

Цех выпускает три вида деталей — А, В, С. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующей таблицей:

Станок	Длительность обработки детали, мин.			Фонд времени, час
	А	В	С	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	30	.

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

#### **Вариант 16**

На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется следующей таблицей:

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг			Запас ресурсов, кг
	1	2	3	
I	5	5	2	1200
II	4	—	3	300
III	—	2	4	800
Прибыль от реализации одной запасной части (д. е.)	5	8	6	

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### **Вариант 17**

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин

В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д.е., 100 д. е., 150 д. е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

### **Вариант 18**

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (таблица). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

### **Вариант 19**

этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице:

Станок	Трудоемкость на 1 ед. продукции		Фонд времени, час.
	А	В	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д. е.)	2	3	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

### **Вариант 20**

Из двух сортов бензина образуются две смеси — А и В. Смесь А содержит бензина 60% 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В - 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А - 10 д.е., а смеси В — 12 д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т 1-го сорта и 30 т 2-го сорта.

### **Вариант 21**

Для производства двух видов изделий А и Б предприятие использует 3 вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице. Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальна, при условии, что изделий Б нужно выпустить не менее, чем изделий А.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед.	30	40	

### *Пример выполнения задания:*

Цех выпускает трансформаторы трех видов. Для изготовления трансформаторов всех видов используются железо, проволока и медь. Общий запас железа – 480 кг, проволоки – 960 кг, а меди – 1000 кг. На один трансформатор первого вида расходуются 2 кг железа и 7 кг проволоки и 8 кг меди, на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа, 7 кг проволоки и 2 кг меди, а для третьего вида – по 7 кг железа, проволоки и меди соответственно. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 17 д. е., второго — 43 д. е., а третьего – 62 ден.ед.

Составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

1) Составление экономико-математической модели.

Пусть  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  – это искомое количество выпускаемых трансформаторов первого, второго и третьего вида соответственно. Тогда максимальная прибыль будет определяться как:

$$F = 17x_1 + 43x_2 + 62x_3 \rightarrow \max;$$

При этом ограничение на имеющееся количество железа будет выглядеть как:

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 480;$$

Ограничение на по проволоке:

$$7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq 960;$$

Ограничение по меди:

$$8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 1000.$$

Кроме того, накладывается техническое ограничение на неотрицательность переменных:

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

2) Решение задачи в Excel

Для решения этой задачи в Excel следует воспользоваться подпунктом **Поиск решения...** пункта меню **Сервис**.

Предварительно введём в ячейку A4 формулу целевой функции в следующем виде:  $=17*A1+43*A2+62*A3$ .

Значения в ячейках A1, A2 и A3 отведём под значения переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно. Числовые значения переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  в эти ячейки будут введены автоматически в процессе решения задачи.

В ячейки B1, B2 и B3 введём математические формулы ограничений в виде, указанном в таблице 2.

Таблица 2.

Ячейка	Значение
B1	$=2*A1+3*A2+7*A3$
B2	$=7*A1+7*A2+7*A3$
B3	$=8*A1+2*A2+7*A3$

Затем введём в ячейки C1, C2 и C3 значения 480, 960 и 1000 соответственно, ограничивающие численные значения переменных задачи. Таким образом, все исходные данные задачи записаны в том виде, в котором они используются в окне "Поиск решения". Теперь воспользуемся подпунктом меню Excel **Поиск решения...** На экране появится следующее окно (рис. 1):

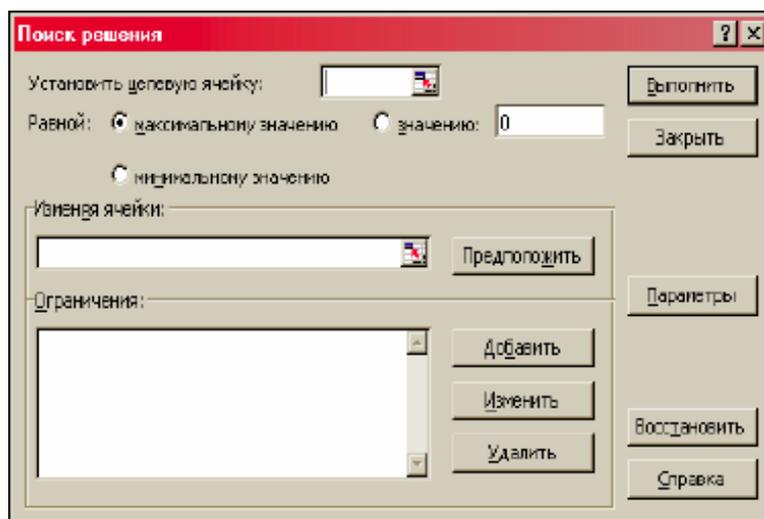


Рисунок 1 – Окно «Поиск решений»

В поле "Установить целевую ячейку" указываем ячейку A4. Решение ищем для максимального значения, что указывается переключателем поля "Равной", установленным на записи со словами "максимальному значению".

В поле "Изменяя ячейки" указываем диапазон изменения ячеек от A1 до A3, а именно \$A\$1:\$A\$3.

Для приведения в рабочее состояние математической программы поиска оптимального решения заданной задачи необходимо установить ограничения, учитываемые при её решении. Для этого нажимаем на кнопку "Добавить", расположенную справа от поля "Ограничения". На экране появляется следующее окно (рис. 2):

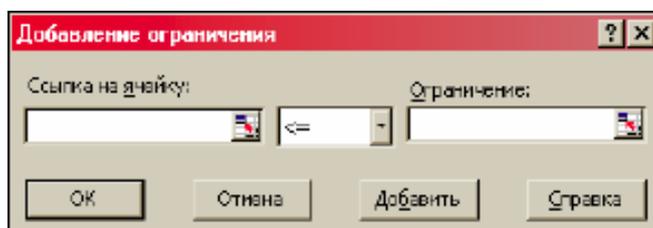


Рисунок 2 – Окно добавления ограничений

Для добавления первого ограничения, а именно  $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 480$ , в поле "Ссылка на ячейку" указываем ячейку B1, затем в списке, расположенном посередине, выбираем знак "<=" и в поле "Ограничение" указываем ячейку C1. После этого нажимаем на кнопку "Добавить". Аналогично добавляем два оставшиеся ограничения задачи. Закрываем окно, нажав на кнопку "Отмена". Окно "Поиск решения" примет вид, показанный на рис. 3.

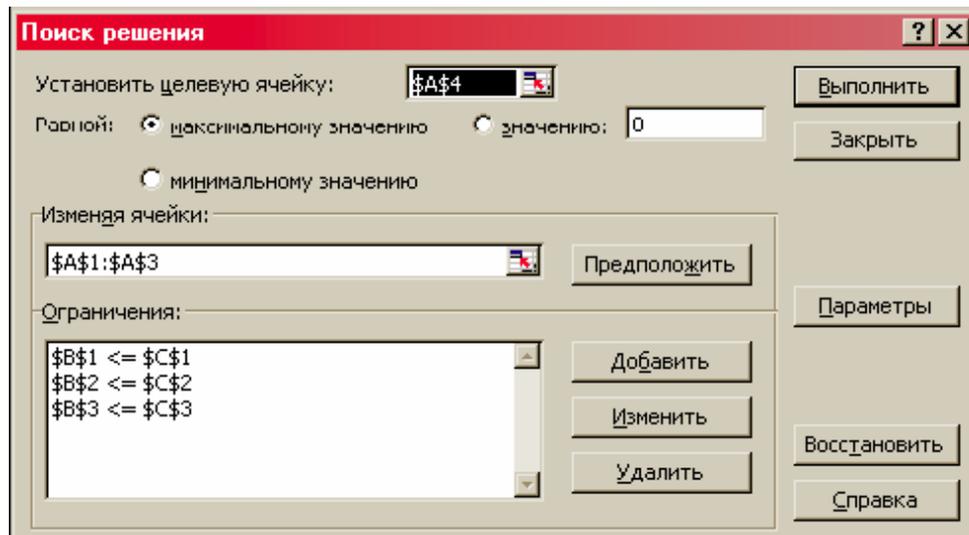


Рисунок 3 – Заполненное окно «Поиск решения»

Нажимаем на кнопку "Выполнить". Параметры в окне должны выбираться реальные, соответствующие заданным числовым характеристикам конкретной задачи. На экран выводится окно "Результаты поиска решения" (рис. 4).

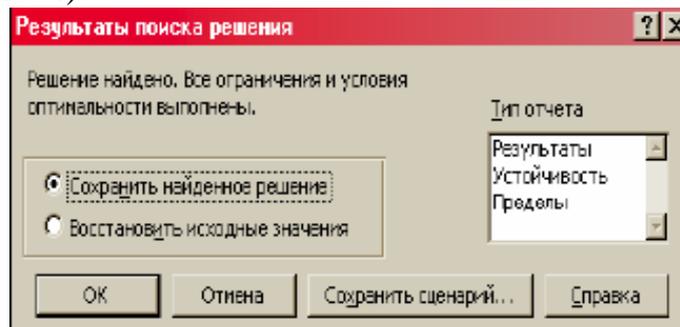


Рисунок 4 – Окно вывода результатов поиска решений

Нажатием на кнопку "OK" закрываем окно. После этого в ячейках, отведённых для записи решения задачи, появляются числа

	A	B	C	D	E
1	0	480	480		
2	120	960	960		
3	17,14286	360	1000		
4	6222,857				
5					
6					
7					

Рисунок 5 - Результат вычислений

В ячейке A4 находим значение целевой функции  $F(X)$ , соответствующее найденному решению. В ячейках A1, A2 и A3 указаны соответствующие значения переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Для решаемой нами задачи оптимальное решение имеет следующий вид:

$$F = 6222,857, x_1 = 0, x_2 = 120 \text{ и } x_3 = 17.$$

### 3) Решение задачи в MathCAD.

#### Постановка задачи

$x_1$  - трансформатор 1го типа

$x_2$  - трансформатор 2го типа

$x_3$  - трансформатор 3го типа

$$f(x_1, x_2, x_3) := 17x_1 + 43x_2 + 62x_3$$

- целевая функция

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$$

- начальные приближения

Given

ограничения

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 480$$

$$7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq 960$$

$$8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 1000$$

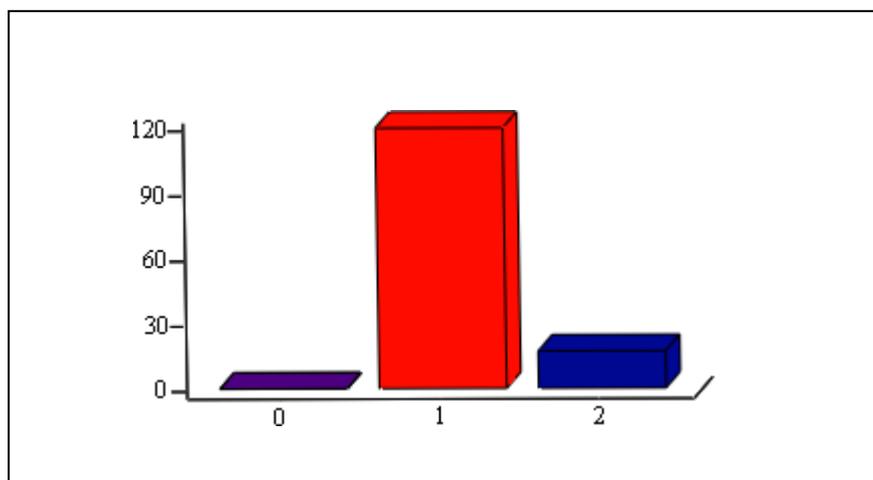
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$\text{Ответ} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Ответ}^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 120 & 17.143 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{x_1} := 0 \quad \underline{x_2} := 120 \quad \underline{x_3} := 17.143$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6222.866$$



Ответ

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию задачи
4. Решение задачи линейного программирования стандартными средствами Excel
5. Решение задачи линейного программирования стандартными средствами MathCAD.
6. Решение задачи линейного программирования графическим методом
7. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Что такое математическая модель задачи?
2. Какая функция называется целевой?
3. Что является допустимым решением ЗЛП?
4. Что является оптимальным решением ЗЛП?
5. Какие бывают формы записи ЗЛП?
6. Как перейти от симметричной формы записи ЗЛП к канонической?
7. Какой вид может иметь область допустимых решений?
8. Что представляет собой на плоскости целевая функция?
9. Перечислите основные этапы решения ЗЛП графическим способом?
10. Чем отличается нахождение минимума целевой функции от нахождения максимума при использовании графического способа решения ЗЛП?
11. Что является допустимым решением ЗЛП (покажите на плоскости)?
12. Что является оптимальным решением ЗЛП (покажите на плоскости)?
13. Какой вид может иметь область допустимых решений?
14. Что представляет собой на плоскости целевая функция?
15. Перечислите основные этапы решения ЗЛП графическим способом?
16. Чем отличается нахождение минимума целевой функции от нахождения максимума при использовании графического способа решения ЗЛП?

Литература:

1. Черников, Ю.Г. Системный анализ и исследование операций. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М.: Горная книга, 2006. — 370 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3512>
2. Чепурницкий, В.С. Исследование операций на основе стандартных программ. [Электронный ресурс] / В.С. Чепурницкий, А.В. Чесноков. — Электрон. дан. — М.: Горная книга, 2002. — 121 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3542>
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972. — 552 с. С.28-58;

4. Таха Х. Введение в исследование операций. — 6-е изд.: Пер. с англ. — М.: Изд. дом “Вильямс”, 2001. — 912 с. С.32-94;

5. Горлач, Б.А. Исследование операций. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4865>

### Практическая работа № 3

#### Решение задачи ЛП симплекс-методом

**Цель работы:** нахождение оптимальных решений задач линейного программирования с использованием симплекс-метода.

Задание:

1. составить математическую модель задачи;
2. решить ЗЛП симплекс-методом.

Работа выполняется:

1. с использованием Mathcad (минимальный уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
2. с использованием любого языка программирования.

#### Варианты заданий.

Примечание:

Для нечетных вариантов выполняется задача 1, для четных вариантов выполняется задача 2.

##### Задача 1.

Для производства двух видов изделий А и В используется три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудование первого типа используется  $a_1$  ч, оборудование второго типа -  $a_2$  ч, третьего -  $a_3$  ч. На производство единицы изделия В оборудование первого типа используется  $b_1$  ч, оборудование второго типа -  $b_2$  ч, третьего -  $b_3$  ч.

На изготовление всех изделий администрация предприятия может предоставить оборудование первого типа не более, чем на  $t_1$  часов, оборудование второго типа не более, чем на  $t_2$  часов, оборудование третьего типа не более, чем на  $t_3$  часов.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет  $r_1$  денежных единиц, изделия В -  $r_2$  денежных единиц.

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

##### Задача 2.

Для производства двух видов изделий А и В используется три вида сырья.

На производство единицы изделия А требуется затратить сырья

первого вида  $a_1$  кг, сырья второго вида -  $a_2$  кг, третьего -  $a_3$  кг. На производство единицы изделия В требуется затратить сырья первого вида  $b_1$  кг, сырья второго вида -  $b_2$  кг, третьего -  $b_3$  кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве  $t_1$  кг, второго вида в количестве  $t_2$  кг, третьего вида  $t_3$  кг.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет  $r_1$  денежных единиц, изделия В -  $r_2$  денежных единиц.

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вариант 1 $a_1=5, b_1=3, t_1=750;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=630;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=700;$ $r_1=5, r_2=6.$	Вариант 2 $a_1=6, b_1=2, t_1=600;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=520;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=600;$ $r_1=6, r_2=3.$	Вариант 3 $a_1=4, b_1=3, t_1=440;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=393;$ $a_3=3, b_3=5, t_3=450;$ $r_1=6, r_2=5.$
Вариант 4 $a_1=3, b_1=2, t_1=273;$ $a_2=3, b_2=3, t_2=300;$ $a_3=2, b_3=5, t_3=380;$ $r_1=4, r_2=5.$	Вариант 5 $a_1=2, b_1=1, t_1=438;$ $a_2=3, b_2=6, t_2=747;$ $a_3=3, b_3=7, t_3=812;$ $r_1=7, r_2=5.$	Вариант 6 $a_1=4, b_1=3, t_1=480;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=444;$ $a_3=2, b_3=6, t_3=546;$ $r_1=2, r_2=4.$
Вариант 7 $a_1=8, b_1=2, t_1=840;$ $a_2=6, b_2=3, t_2=870;$ $a_3=3, b_3=2, t_3=560;$ $r_1=6, r_2=2.$	Вариант 8 $a_1=5, b_1=2, t_1=505;$ $a_2=3, b_2=3, t_2=393;$ $a_3=2, b_3=3, t_3=348;$ $r_1=7, r_2=4.$	Вариант 9 $a_1=6, b_1=2, t_1=600;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=520;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=600;$ $r_1=6, r_2=3.$
Вариант 10 $a_1=2, b_1=3, t_1=428;$ $a_2=3, b_2=6, t_2=672;$ $a_3=2, b_3=8, t_3=672;$ $r_1=3, r_2=8.$	Вариант 11 $a_1=3, b_1=2, t_1=273;$ $a_2=3, b_2=3, t_2=300;$ $a_3=2, b_3=5, t_3=380;$ $r_1=4, r_2=5.$	Вариант 12 $a_1=7, b_1=3, t_1=1365;$ $a_2=6, b_2=3, t_2=1245;$ $a_3=1, b_3=2, t_3=650;$ $r_1=6, r_2=5.$
Вариант 13 $a_1=4, b_1=3, t_1=480;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=444;$ $a_3=2, b_3=6, t_3=546;$ $r_1=2, r_2=4.$	Вариант 14 $a_1=5, b_1=3, t_1=750;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=630;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=700;$ $r_1=5, r_2=6.$	Вариант 15 $a_1=5, b_1=2, t_1=505;$ $a_2=3, b_2=3, t_2=393;$ $a_3=2, b_3=3, t_3=348;$ $r_1=7, r_2=4.$
Вариант 16 $a_1=4, b_1=3, t_1=440;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=393;$ $a_3=3, b_3=5, t_3=450;$ $r_1=6, r_2=5.$	Вариант 17 $a_1=2, b_1=3, t_1=428;$ $a_2=3, b_2=6, t_2=672;$ $a_3=2, b_3=8, t_3=672;$ $r_1=3, r_2=8.$	Вариант 18 $a_1=2, b_1=1, t_1=438;$ $a_2=3, b_2=6, t_2=747;$ $a_3=3, b_3=7, t_3=812;$ $r_1=7, r_2=5.$
Вариант 19 $a_1=7, b_1=3, t_1=1365;$ $a_2=6, b_2=3, t_2=1245;$ $a_3=1, b_3=2, t_3=650;$ $r_1=6, r_2=5.$	Вариант 20 $a_1=8, b_1=2, t_1=840;$ $a_2=6, b_2=3, t_2=870;$ $a_3=3, b_3=2, t_3=560;$ $r_1=6, r_2=2.$	Вариант 21 $a_1=5, b_1=3, t_1=750;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=630;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=700;$ $r_1=5, r_2=6.$

Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
a1=6, b1=2, t1=600; a2=4, b2=3, t2=520; a3=3, b3=4, t3=600; r1=6, r2=3.	a1=4, b1=3, t1=440; a2=3, b2=4, t2=393; a3=3, b3=5, t3=450; r1=6, r2=5.	a1=3, b1=2, t1=273; a2=3, b2=3, t2=300; a3=2, b3=5, t3=380; r1=4, r2=5.
Вариант 25 a1=2, b1=1, t1=438; a2=3, b2=6, t2=747; a3=3, b3=7, t3=812; r1=7, r2=5.	Вариант 26 a1=4, b1=3, t1=480; a2=3, b2=4, t2=444; a3=2, b3=6, t3=546; r1=2, r2=4.	Вариант 27 a1=8, b1=2, t1=840; a2=3, b2=3, t2=393; a3=2, b3=3, t3=348; r1=6, r2=4.
Вариант 28 a1=5, b1=2, t1=505; a2=6, b2=3, t2=870; a3=3, b3=2, t3=560; r1=7, r2=2.	Вариант 29 a1=2, b1=3, t1=428; a2=3, b2=6, t2=672; a3=2, b3=8, t3=672; r1=3, r2=8.	Вариант 30 a1=7, b1=3, t1=1365; a2=6, b2=3, t2=1245; a3=1, b3=2, t3=650; r1=6, r2=5.

### Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию задачи
4. Решение задачи линейного программирования с использованием Mathcad (минимальный уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
5. Решение задачи линейного программирования с использованием любого языка программирования (листинг программы и результат ее выполнения)
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

### Вопросы к защите лабораторной работы

1. В какой форме должна быть записана ЗЛП для решения ее симплекс-методом?
2. Какие переменные являются зависимыми (базисными), а какие – независимыми (свободными)?
3. Какие переменные приравниваются к 0 для нахождения первого опорного плана?
4. Что является первым опорным решением ЗЛП?
5. Что выступает критерием оптимальности при минимизации (максимизации) целевой функции?
6. Каков алгоритм симплекс-метода?
7. Как выбирается направляющий столбец?
8. Как выбирается направляющая строка?
9. Какой элемент называется разрешающим?
10. Когда ЗЛП не имеет решения?
11. Что представляет из себя жорданова перестановка (транспозиция)?

12. Как определяются элементы новой симплекс-таблицы (разрешающий элемент, элементы направляющего столбца и строки, остальные элементы)?

#### Литература:

1. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.
2. Исследование операций: Учебник/ О.А.Косоруков, А.В.Мищенко // Под ред. Н.П.Тихомирова. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с. С.50-83;
3. Исследование операций в экономике: Уч.пособие для вузов /Н.Ш.Кремер, Б.А.Прутко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Н.Ш.Кремера. — М.:ЮНИТИ, 2003. – 407 с. С. 64-98;
4. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.
5. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: Учеб. пособие. Спб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.
6. Лунгу, К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2009. — 132 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/2253>

## Практическая работа №4

### Двойственная задача линейного программирования

**Цель работы:** составление двойственных задач линейного программирования, нахождение оптимальных решений прямой и двойственной задач, анализ полученных результатов.

**Задание:**

1. составить математическую модель двойственной задачи к задаче из лабораторной работы №3;
2. решить прямую и двойственную ЗЛП симплекс-методом;
3. провести экономико-математический анализ полученных оптимальных решений.

Работа выполняется:

- 1) вручную
- 2) с использованием Mathcad (минимальный уровень) и расчетами, выполненными вручную.
- 3) с использованием любого языка программирования.

## Варианты заданий.

Примечание:

Для нечетных вариантов выполняется задача 1, для четных вариантов выполняется задача 2.

### Задача 1.

Для производства двух видов изделий А и В используется три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудование первого типа используется  $a_1$  ч, оборудование второго типа -  $a_2$  ч, третьего -  $a_3$  ч. На производство единицы изделия В оборудование первого типа используется  $b_1$  ч, оборудование второго типа -  $b_2$  ч, третьего -  $b_3$  ч.

На изготовление всех изделий администрация предприятия может предоставить оборудование первого типа не более, чем на  $t_1$  часов, оборудование второго типа не более, чем на  $t_2$  часов, оборудование третьего типа не более, чем на  $t_3$  часов.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет  $r_1$  денежных единиц, изделия В -  $r_2$  денежных единиц.

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

### Задача 2.

Для производства двух видов изделий А и В используется три вида сырья.

На производство единицы изделия А требуется затратить сырья первого вида  $a_1$  кг, сырья второго вида -  $a_2$  кг, третьего -  $a_3$  кг. На производство единицы изделия В требуется затратить сырья первого вида  $b_1$  кг, сырья второго вида -  $b_2$  кг, третьего -  $b_3$  кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве  $t_1$  кг, второго вида в количестве  $t_2$  кг, третьего вида  $t_3$  кг.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет  $r_1$  денежных единиц, изделия В -  $r_2$  денежных единиц.

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вариант 1 $a_1=5, b_1=3, t_1=750;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=630;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=700;$ $r_1=5, r_2=6.$	Вариант 2 $a_1=6, b_1=2, t_1=600;$ $a_2=4, b_2=3, t_2=520;$ $a_3=3, b_3=4, t_3=600;$ $r_1=6, r_2=3.$	Вариант 3 $a_1=4, b_1=3, t_1=440;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=393;$ $a_3=3, b_3=5, t_3=450;$ $r_1=6, r_2=5.$
Вариант 4 $a_1=3, b_1=2, t_1=273;$ $a_2=3, b_2=3, t_2=300;$ $a_3=2, b_3=5, t_3=380;$	Вариант 5 $a_1=2, b_1=1, t_1=438;$ $a_2=3, b_2=6, t_2=747;$ $a_3=3, b_3=7, t_3=812;$	Вариант 6 $a_1=4, b_1=3, t_1=480;$ $a_2=3, b_2=4, t_2=444;$ $a_3=2, b_3=6, t_3=546;$

r1=4, r2=5.	r1=7, r2=5.	r1=2, r2=4.
Вариант 7 a1=8, b1=2, t1=840; a2=6, b2=3, t2=870; a3=3, b3=2, t3=560; r1=6, r2=2.	Вариант 8 a1=5, b1=2, t1=505; a2=3, b2=3, t2=393; a3=2, b3=3, t3=348; r1=7, r2=4.	Вариант 9 a1=6, b1=2, t1=600; a2=4, b2=3, t2=520; a3=3, b3=4, t3=600; r1=6, r2=3.
Вариант 10 a1=2, b1=3, t1=428; a2=3, b2=6, t2=672; a3=2, b3=8, t3=672; r1=3, r2=8.	Вариант 11 a1=3, b1=2, t1=273; a2=3, b2=3, t2=300; a3=2, b3=5, t3=380; r1=4, r2=5.	Вариант 12 a1=7, b1=3, t1=1365; a2=6, b2=3, t2=1245; a3=1, b3=2, t3=650; r1=6, r2=5.
Вариант 13 a1=4, b1=3, t1=480; a2=3, b2=4, t2=444; a3=2, b3=6, t3=546; r1=2, r2=4.	Вариант 14 a1=5, b1=3, t1=750; a2=4, b2=3, t2=630; a3=3, b3=4, t3=700; r1=5, r2=6.	Вариант 15 a1=5, b1=2, t1=505 ; a2=3, b2=3, t2=393; a3=2, b3=3, t3=348; r1=7, r2=4.
Вариант 16 a1=4, b1=3, t1=440; a2=3, b2=4, t2=393; a3=3, b3=5, t3=450; r1=6, r2=5.	Вариант 17 a1=2, b1=3, t1=428; a2=3, b2=6, t2=672; a3=2, b3=8, t3=672; r1=3, r2=8.	Вариант 18 a1=2, b1=1, t1=438; a2=3, b2=6, t2=747; a3=3, b3=7, t3=812; r1=7, r2=5.
Вариант 19 a1=7, b1=3, t1=1365; a2=6, b2=3, t2=1245; a3=1, b3=2, t3=650; r1=6, r2=5.	Вариант 20 a1=8, b1=2, t1=840; a2=6, b2=3, t2=870; a3=3, b3=2, t3=560; r1=6, r2=2.	Вариант 21 a1=5, b1=3, t1=750; a2=4, b2=3, t2=630; a3=3, b3=4, t3=700; r1=5, r2=6.
Вариант 22 a1=6, b1=2, t1=600; a2=4, b2=3, t2=520; a3=3, b3=4, t3=600; r1=6, r2=3.	Вариант 23 a1=4, b1=3, t1=440; a2=3, b2=4, t2=393; a3=3, b3=5, t3=450; r1=6, r2=5.	Вариант 24 a1=3, b1=2, t1=273; a2=3, b2=3, t2=300; a3=2, b3=5, t3=380; r1=4, r2=5.
Вариант 25 a1=2, b1=1, t1=438; a2=3, b2=6, t2=747;	Вариант 26 a1=4, b1=3, t1=480; a2=3, b2=4, t2=444;	Вариант 27 a1=8, b1=2, t1=840; a2=3, b2=3, t2=393;

a3=3, b3=7, t3=812; r1=7, r2=5.	a3=2, b3=6, t3=546; r1=2, r2=4.	a3=2, b3=3, t3=348; r1=6, r2=4.
Вариант 28 a1=5, b1=2, t1=505; a2=6, b2=3, t2=870; a3=3, b3=2, t3=560; r1=7, r2=2.	Вариант 29 a1=2, b1=3, t1=428; a2=3, b2=6, t2=672; a3=2, b3=8, t3=672; r1=3, r2=8.	Вариант 30 a1=7, b1=3, t1=1365; a2=6, b2=3, t2=1245; a3=1, b3=2, t3=650; r1=6, r2=5.

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию прямой и двойственной задач
4. Решение прямой и двойственной ЗЛП симплекс-методом с использованием Mathcad (минимальный уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
5. Решение задачи линейного программирования с использованием любого языка программирования (листинг программы и результат ее выполнения)
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

**Вопросы к защите лабораторной работы.**

1. Сформулируйте экономическое содержание двойственной задачи производственного планирования.
2. Сформулируйте общие правила построения двойственной задачи.
3. Чему равняется количество переменных двойственной задачи?
4. Чему равняется количество ограничений двойственной задачи?
5. Что ограничению-неравенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче? Что ограничению-равенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче?
6. Что соответствует положительной переменной  $x_j \geq 0$  в двойственной задаче? А что переменной произвольного знака?
7. Какая взаимосвязь между матрицами систем ограничений прямой и двойственной задачи?
8. Что характеризует дефицитность ресурсов?
9. Как проводится анализ на чувствительность оптимального решения?
10. Как используется двойственная оценка для оценки эффективности выпуска того или иного вида продукции?

Литература:

1. Лунгу, К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М.: Физматлит, 2009. — 132 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/2253>

2. Черников, Ю.Г. Системный анализ и исследование операций. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М.: Горная книга, 2006. — 370 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3512>
3. Исследование операций в экономике: Уч.пособие для вузов /Н.Ш.Кремер, Б.А.Прутко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Н.Ш.Кремера. — М.:ЮНИТИ, 2003. — 407 с. С. 64-98;
4. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. — 144 с.
5. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: Учеб. пособие. Спб.: Издательство «Лань», 2008. — 352 с.

## Практическая работа №5

### Транспортная задача

**Цель работы:** нахождение оптимального решения транспортной задачи.

**Задание:**

#### Уровень 1.

Решить транспортную задачу (найти оптимальный план) с помощью метода потенциалов, Excel и MathCAD.

#### Уровень 2.

Разработать программный продукт, который бы позволял найти:

- 1) опорные план транспортной задачи методом :
  - 1.1. северо-западного угла;
  - 1.2. минимальной стоимости;
- 2) сравнение методов нахождения опорного плана по эффективности ( $F \rightarrow \min$ );
- 3) оптимальный план (методом потенциалов).

### Пример решения в Excel.

Исходные данные.

$a_i \backslash b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 250$	1	4	7	9	1
$a_2 = 300$	2	3	1	2	4
$a_3 = 150$	2	1	3	1	4

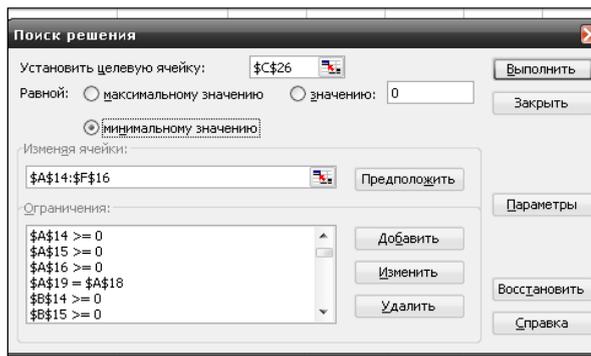
## Лист с исходными данными.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Матрица Cij					Вектор Ai		
3	1	4	7	9	1	250		
4	2	3	1	2	4	300		
5	2	1	3	1	4	150		
6	Вектор Bj							
7	110	80	100	90	70			
8								
9	проверка сбалансированности							
10		450	<	700				
11		$\sum bj$	<	$\sum ai$				
12	вводим фиктивный столбец							
13	Матрица Xij					Вектор Ai	Сумма X по i	
14	0	0	0	0	0	250	0	
15	0	0	0	0	0	300	0	
16	0	0	0	0	0	150	0	
17	Вектор Bj							
18	110	80	100	90	70	250		
19	0	0	0	0	0	0	Сумма X по i	
20								
21	Матрица Cij							
22	1	4	7	9	1	0		
23	2	3	1	2	4	0		
24	2	1	3	1	4	0		
25								
26	целевая функция		0					

## Лист с формулами

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Матрица Cij					Вектор Ai		
3	1	4	7	9	1	250		
4	2	3	1	2	4	300		
5	2	1	3	1	4	150		
6	Вектор Bj							
7	110	80	100	90	70			
8								
9	проверка сбалансированности							
10		=СУММ(A7:E7)	<	=СУММ(F3:F5)				
11		$\sum bj$	<	$\sum ai$				
12	вводим фиктивный столбец							
13	Матрица Xij					Вектор Ai	Сумма X по i	
14	0	0	0	0	0	250	=СУММ(A14:F14)	
15	0	0	0	0	0	300	=СУММ(A15:F15)	
16	0	0	0	0	0	150	=СУММ(A16:F16)	
17	Вектор Bj							
18	110	80	100	90	70	=D10-B10		
19	=СУММ(A14:A16)	=СУММ(B14:B16)	=СУММ(C14:C16)	=СУММ(D14:D16)	=СУММ(E14:E16)	=СУММ(F14:F16)	Сумма X по i	
20								
21	Матрица Cij							
22	1	4	7	9	1	0		
23	2	3	1	2	4	0		
24	2	1	3	1	4	0		
25								
26	целевая функция		=A14*A22+B14*B22+C14*C22					
27			+D14*D22+E14*E22+F14*F22					
28			+A15*A23+B15*B23+C15*C23					
29			+D15*D23+E15*E23+F15*F23					
30			+A24*A16+B16*B24+C16*C24					
31			+D16*D24+E16*E24+F16*F24					

## Поиск решения.



Необходимо ввести ограничения:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (\text{по строкам})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (\text{по столбцам})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\text{для каждого } X).$$

## Результат.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1										
2		Матрица Cij					Вектор Ai			
3	1	4	7	9	1	250				
4	2	3	1	2	4	300				
5	2	1	3	1	4	150				
6		Вектор Bj								
7	110	80	100	90	70					
8										
9		проверка сбалансированности								
10		450	<	700						
11		∑bj	<	∑ai						
12		вводим фиктивный столбец								
13		Матрица Xij					Вектор Ai	Сумма X по i		
14	110	0	0	0	70	70	250	250		
15	0	0	100	20	0	180	300	300		
16	0	80	0	70	0	0	150	150		
17		Вектор Bj								
18	110	80	100	90	70	250				
19	110	80	100	90	70	250	Сумма X по i			
20										
21		Матрица Cij								
22	1	4	7	9	1	0				
23	2	3	1	2	4	0				
24	2	1	3	1	4	0				
25										
26	целевая функция		470							
27										

## Пример решения в MathCAD.

$$i := 1..18 \quad x_i := 0$$

$$F1(x) := 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$$F2(x) := 2 \cdot x_7 + 3 \cdot x_8 + 1 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 4 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12}$$

$$F3(x) := 2 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 3 \cdot x_{15} + 1 \cdot x_{16} + 4 \cdot x_{17} + 0 \cdot x_{18}$$

$$F(x) := F1(x) + F2(x) + F3(x)$$

$$F(x) = 0$$

$$F(x) := F1(x) + F2(x) + F3(x)$$

Given

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 250$$

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 300$$

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 150$$

$$x_1 + x_7 + x_{13} = 110 \quad x_1 \geq 0 \quad x_6 \geq 0 \quad x_{11} \geq 0 \quad x_{15} \geq 0$$

$$x_2 + x_8 + x_{14} = 80 \quad x_2 \geq 0 \quad x_7 \geq 0 \quad x_{12} \geq 0 \quad x_{16} \geq 0$$

$$x_3 + x_9 + x_{15} = 100 \quad x_3 \geq 0 \quad x_8 \geq 0 \quad x_{13} \geq 0 \quad x_{17} \geq 0$$

$$x_4 + x_{10} + x_{16} = 90 \quad x_4 \geq 0 \quad x_9 \geq 0 \quad x_{14} \geq 0 \quad x_{18} \geq 0$$

$$x_5 + x_{11} + x_{17} = 70 \quad x_5 \geq 0 \quad x_{10} \geq 0$$

$$x_6 + x_{12} + x_{18} = 250$$

$$D := \text{minimize}(F, x)$$

$$D^T =$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
0	0	110	0	0	0	70	70	0	0	100	20	0	180	0	80	0	70	0	0

$$F1 := 1 \cdot 110 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 1 \cdot 70 + 0 \cdot 70$$

$$F2 := 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 180$$

$$F3 := 2 \cdot 0 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

$$F := F1 + F2 + F3 \quad F = 470$$

### Варианты.

#### Вариант 1.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 120$	$b_2 = 120$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
-------	-------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

$a_1 = 200$	1	2	3	5	2
$a_2 = 150$	4	6	7	3	1
$a_3 = 350$	2	2	3	4	5

Вариант 2.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 140$	$b_2 = 110$	$b_3 = 170$	$b_4 = 90$	$b_5 = 140$
$a_1 = 250$		4	3	4	5	3
$a_2 = 200$		2	4	5	7	8
$a_3 = 220$		4	3	7	2	1

Вариант 3.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 140$	$b_3 = 220$	$b_4 = 190$	$b_5 = 120$
$a_1 = 180$		2	4	5	8	6
$a_2 = 300$		7	3	6	4	5
$a_3 = 230$		8	5	6	5	3

Вариант 4.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 160$	$b_2 = 120$	$b_3 = 140$	$b_4 = 200$	$b_5 = 170$
$a_1 = 300$		1	4	2	1	3
$a_2 = 250$		6	2	3	5	1
$a_3 = 200$		2	3	4	1	4

Вариант 5.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 200$	$b_3 = 90$	$b_4 = 100$	$b_5 = 120$
$a_1 = 100$		5	2	3	6	1
$a_2 = 300$		1	1	4	4	2
$a_3 = 150$		4	1	2	3	5

Вариант 6.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 150$		5	1	2	3	4
$a_2 = 320$		7	8	1	1	2
$a_3 = 400$		4	1	3	1	2

Вариант 7.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 200$		1	4	5	3	1
$a_2 = 350$		2	3	1	4	2
$a_3 = 150$		2	1	3	1	1

Вариант 8.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 90$	$b_3 = 200$	$b_4 = 30$	$b_5 = 80$
$a_1 = 200$		1	2	4	1	5
$a_2 = 120$		1	2	1	3	1
$a_3 = 150$		2	1	3	3	1

Вариант 9.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 130$	$b_4 = 100$	$b_5 = 90$
$a_1 = 300$		1	4	5	3	1
$a_2 = 120$		2	1	2	1	2
$a_3 = 300$		3	1	4	2	1

Вариант 10.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 20$	$b_3 = 70$	$b_4 = 90$	$b_5 = 180$
$a_1 = 300$		1	4	2	1	2
$a_2 = 90$		2	2	3	1	3
$a_3 = 70$		3	4	5	6	7

Вариант 11.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 200$	$b_3 = 130$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 150$		1	4	7	2	1
$a_2 = 200$		2	5	1	4	3
$a_3 = 170$		46	27	36	40	45

Вариант 12.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 120$	$b_2 = 130$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 200$		1	4	7	8	1
$a_2 = 150$		2	3	1	4	1
$a_3 = 35$		5	1	3	2	3

Вариант 13.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 140$	$b_2 = 110$	$b_3 = 170$	$b_4 = 90$	$b_5 = 140$
$a_1 = 250$		1	2	3	5	2
$a_2 = 200$		4	6	7	3	1
$a_3 = 220$		3	2	3	4	5

Вариант 14.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 130$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 200$		2	4	5	8	6
$a_2 = 150$		7	3	6	4	5
$a_3 = 350$		8	2	3	4	5

Вариант 15.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 140$	$b_4 = 200$	$b_5 = 170$
$a_1 = 300$		1	4	2	1	3
$a_2 = 250$		6	2	3	5	1
$a_3 = 200$		2	3	4	1	4

Вариант 16.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 150$		2	5	3	6	1
$a_2 = 320$		1	1	4	4	2
$a_3 = 400$		4	1	2	3	5

Вариант 17.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 200$		1	4	7	2	1
$a_2 = 350$		2	5	1	4	3
$a_3 = 150$		2	3	1	2	1

Вариант 18.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 150$		1	4	2	1	3
$a_2 = 320$		6	2	3	5	1
$a_3 = 400$		2	3	4	1	4

Вариант 19.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 180$	$b_2 = 110$	$b_3 = 70$	$b_4 = 90$	$b_5 = 170$
$a_1 = 250$		1	2	4	1	5
$a_2 = 200$		1	2	1	3	1
$a_3 = 220$		2	1	3	3	1

Вариант 20.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 170$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 200$		5	2	3	6	1
$a_2 = 150$		1	1	4	4	2
$a_3 = 350$		4	3	1	2	1

Вариант 21.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 20$	$b_3 = 70$	$b_4 = 100$	$b_5 = 180$
$a_1 = 300$		1	4	7	2	3
$a_2 = 90$		1	5	3	1	6
$a_3 = 70$		2	1	3	1	4

Вариант 22.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 90$	$b_4 = 70$	$b_5 = 80$
$a_1 = 300$		1	4	1	5	6
$a_2 = 250$		1	3	1	1	2
$a_3 = 200$		4	1	2	2	3

Вариант 23.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 350$		1	5	1	7	1
$a_2 = 200$		2	3	1	8	3
$a_3 = 150$		6	7	9	10	8

Вариант 24.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 90$	$b_3 = 100$	$b_4 = 80$	$b_5 = 200$
$a_1 = 270$		1	4	7	9	1
$a_2 = 300$		2	3	1	2	4
$a_3 = 100$		5	6	7	1	2

Вариант 25.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 40$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 150$	$b_5 = 200$
$a_1 = 250$		1	5	1	3	1
$a_2 = 300$		2	4	7	1	3
$a_3 = 150$		2	4	5	6	1

Вариант 26.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 80$	$b_4 = 70$	$b_5 = 90$
-------	-------	-------------	-------------	------------	------------	------------

$a_1 = 200$	1	4	2	3	1
$a_2 = 150$	2	1	7	8	1
$a_3 = 200$	2	1	3	1	4

Вариант 27.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 250$		1	4	7	9	1
$a_2 = 300$		2	3	1	2	4
$a_3 = 150$		2	1	3	1	4

Вариант 28.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 90$	$b_4 = 70$	$b_5 = 80$
$a_1 = 200$		1	4	7	9	1
$a_2 = 100$		1	3	1	1	2
$a_3 = 160$		4	1	2	3	1

Вариант 29.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 90$	$b_4 = 70$	$b_5 = 80$
$a_1 = 350$		1	5	1	7	1
$a_2 = 200$		3	2	1	8	3
$a_3 = 150$		6	7	9	1	3

Вариант 30.

$a_i$	$b_j$	$b_1 = 100$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 70$	$b_5 = 200$
$a_1 = 200$		1	4	7	9	1
$a_2 = 200$		2	3	1	2	4
$a_3 = 140$		2	4	5	6	1

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию транспортной задачи
4. Решение транспортной задачи с помощью Excel и MathCAD.
5. Решение транспортной задачи любого языка программирования (листинг программы и результат ее выполнения)
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы:

- 1) Общая математическая постановка транспортной задачи.
- 2) Открытая и закрытая транспортная задачи.
- 3) Особенности транспортных задач.

- 4) Методы поиска опорного плана транспортных задач: метод северо-западного угла, метод наименьших стоимостей.
- 5) Метод потенциалов для решения транспортной задачи.

## Практическая работа №6

### Решение задач нелинейного программирования

**Цель работы:** нахождение оптимальных решений задач нелинейного программирования графическим методом

**Задание:**

- 1) Решить задачи нелинейного программирования согласно варианта графическим методом.

### Варианты задания

Варианты заданий

<i>Вариант</i>	<i>Задание 1</i>	<i>Задание 2</i>
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	1
10	1	2
11	2	3
12	3	4
13	4	5
14	5	6
15	6	7
16	7	8
17	8	9
18	9	2
19	1	3
20	2	4
21	3	5
22	4	6
23	5	7
24	6	8
25	7	9
26	8	1
27	9	2
28	1	3
29	2	4
30	3	5

1. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = x_2 - x_1^2 + 5x_1$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 10x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = x_2 - x_1^2 + 4x_1$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 10x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. Найти максимальное и минимальное значения функции F

$$F = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Отчет о выполненной работе должен содержать:**

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию задачи
4. Решение задачи нелинейного программирования графическим методом.
5. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

**Вопросы к защите лабораторной работы:**

1. Понятие нелинейного программирования.
2. Графическое решение задач НЛП.
3. Градиентный метод решения задач нелинейного программирования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Черняк, А. А. Исследование операций на базе Mathcad. Лекции, практика, лабораторные работы : учебное пособие / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 308 с. - ISBN 978-5-9729-2136-2. - URL: <https://znanium.ru/catalog/pro>
2. Северцев, Н. А. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности : учеб. пособие для вузов / Н. А. Северцев, А. Н. Катулев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2024. — 319 с. — URL: <https://urait.ru/bcode/539931>.
3. Горлач, Б. А. Исследование операций. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов : учебное пособие для вузов / Б. А. Горлач, Н. Л. Додонова. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 200 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/162371>
4. Горлач, Б. А. Исследование операций : учебное пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1430-7. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211085>.
5. Есипов, Б. А. Методы исследования операций : учебное пособие / Б. А. Есипов. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-0917-4. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168876>.
6. Исследование операций в задачах программной инженерии : учебное пособие / Н. А. Соловьев, Е. Н. Чернопрудова, Н. А. Тишина, А. Ф. Валеев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 164 с. — ISBN 978-5-8114-3770-2. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206771>.