МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФИЛИАЛ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. НИЖНЕВАРТОВСКЕ
Кафедра «Гуманитарные, естественно-научные и технические дисциплины»

Ю.А. Захарова

Математика
часть 4

Методические указания по разделу «Математический анализ» дисциплин «Математика», «Специальные главы математики» для всех форм обучения и направлений подготовки

НИЖНЕВАРТОВСК
2023

ББК 22.161
М 33

Одобрено
редакционно-издательским советом филиала

Математика – часть 4: Методические указания по разделу «Математический анализ» дисциплин «Математика», «Специальные главы математики» для всех форм обучения и направлений подготовки / сост. Ю.А. Захарова. – Нижневартовск, 2023. – Нижневартовск, 2023. – 37 с.

Задания составлены для третьего семестра обучения всех форм обучения и направлений подготовки для формирования компетенций, предусмотренных РПД.

СОДЕРЖАНИЕ:

Практическая работа № 1 «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»:

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Решить дифференциальные уравнения:

12.17	$(3x-1)dy + y^2dx = 0$
12.18	$3x^2ydx + 2\sqrt{4-x^3}dy = 0$
12.19	$xy' + 2y = 2xyy'$
12.20	$e^{1-2x}(y^2-1)dy - dx = 0$
12.21	$x^2(y'-1) = 2y'$
12.25	$y' = \sqrt{4x+2y-1}$

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанных начальным условиям:

12.27	$(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0; y(1) = -1$
12.28	$\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0; y(1) = 1$
12.29	$x^2(2yy'-1) = 1; y(1) = 0$
12.30	$ydx + ctgxdy = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

Практическая работа № 1 (Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными) задачи: 12.18, 12.19, 12.20, 12.27, 12.29 и 12.30 (стр. 320) Практикум под. ред. Кремера. + Задачи № 1 и № 2 (по варианту)

Варианты № 1 и № 7

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$\left(xy^2 + x\right)dx = \left(y - x^2 y\right)dy\,;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0\text{, если } y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Варианты № 2 и № 8

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$\sqrt{1-x^2}\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0\,;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$y'\,\mathrm{tg}\,x = 1 + y\text{, если } y = -\frac{1}{2} \text{ при } x = \frac{\pi}{6}.$$

Варианты № 3 и № 9

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$\cos x \sin y\,dy = \cos y \sin x\,dx$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$\left(1 + y^2\right)dx = xydy\text{, если } y = 1 \text{ при } x = 1.$$

Варианты № 4 и № 10

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$e^x\left(1 + e^y\right)dx + e^y\left(1 + e^x\right)dy = 0$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$\left(1 - x^2\right)y' + xy = 0\text{, если } y = 4 \text{ при } x = 0.$$

Варианты № 5 и № 11

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$\left(1+x^2\right)dy-\left(xy+x\right)dx=0;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$x\sqrt{9-y^2}\;dx-y\sqrt{4+x^2}\;dy=0,\ \text{если}\ y=0\ \text{при}\ x=0.$$

Варианты № 6 и № 12

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$y'=xe^{-y},\ \text{если}\ y=0\ \text{при}\ x=1.$$

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $\dfrac{y}{y'}=\ln y$ при условии $y(2)=1$.

$$\frac{ydx}{dy}=\ln y$$

$$dx=\frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx=\int\frac{\ln ydy}{y}$$

$$x+C=\int\ln yd(\ln y)$$

$$x+C=\frac{\ln^2 y}{2}$$

при $y(2)=1$ получаем $2+C=\dfrac{\ln^2 1}{2};\quad\Rightarrow\quad 2+C=0;\quad\Rightarrow\quad C=-2;$

Итого: $2(x-2)=\ln^2 y;$ или $y=e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - *частное решение*;

Проверка: $y'=e^{\pm\sqrt{2x-4}}\cdot\dfrac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'}=\frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}}=\pm\sqrt{2x-4}=\ln y$$ - верно.

Пример 2. Решить уравнение $y'=y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx}=y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy=dx$$

$$\int y^{-2/3}dy=\int dx$$

$$3y^{1/3}=x+C$$

$27y=(x+C)^3$ - *общий интеграл*

$y=\dfrac{1}{27}(x+C)^3$ - *общее решение*

Пример 3. Решить уравнение $y'=x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1}=dx;\qquad \int\frac{dy}{y^2+1}=\int dx;$$

$$arctgy=\frac{x^2}{2}+C;\qquad y=tg\left(\frac{x^2}{2}+C\right);$$

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0$ при условии *y(1) = 0*.

$$\frac{ydy}{dx}+xe^y=0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y}dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям

$$\int ye^{-y}dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{matrix} \right\} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Если *y(1) = 0,* то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Пример 5. Решить уравнение $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$

$$y' + 2\sin y \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos xdx; \qquad \int \frac{dy}{\sin y} = -2\int \cos xdx;$$

Для нахождения интеграла, стоящего в левой части уравнения см. *Таблица основных интегралов*. Получаем *общий интеграл:*

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

Практическая работа № 2 «Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка»:

Функция $f(x, y)$ называется *однородной n – го измерения* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Решить дифференциальные уравнения:

12. 31	$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$
12. 32	$y' = \frac{x + y}{x + 1} + \left(\frac{y - 1}{x + 1}\right)^2$
12.34	$xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$
12.35	$xy' = yln\frac{x}{y}$
12.36	$y - xy' = x + yy'$
12.37	$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$
12.39	$y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$
12.40	$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$
12.42	$y' = \frac{y + 2}{x + 1} + tg\frac{y - 2x}{x + 1}$

Практическая работа № 2 (Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка»): (стр. 323) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.34, № 12.35, № 12.36, № № 12.37, № 12.40 и № 12.42.

Пример 1. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3(x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является *однородной 3- го порядка*.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если его правая часть $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является *однородным*, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – *однородные функции одинакового измерения*.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция *f(x, y)* – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр t произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$.

Получим:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив *вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y* и найдя интегралы, получим *общее решение однородного дифференциального уравнения*.

Пример 2. решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln \frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u(y/x)* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln\left|\ln u\right| = \ln\left|x\right| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем *общее решение*:

$$y = xe^{Cx}.$$

Практические работы № 3 и № 4 «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения»:

Решить дифференциальное уравнение методами Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

12. 45	$y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2$
12. 48	$y' - 2y = e^{2x}$
12.49	$y' + \dfrac{y}{x} = xe^{x/2}$
12.50	$4y' + \dfrac{2y}{x+1} = \dfrac{x^2}{y^2}$
12.51	$(y^2 + x)y' = 1$

Практическая работа № 3 (Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1 порядка метод Бернулли): (стр. 328) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.48, № 12.49 и 12.50.

Практическая работа № 4 (Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1 порядка метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)): (стр. 328) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.48, № 12.49 и 12.51.

Варианты № 1, № 6, № 11 и № 16

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$2y' - y = e^x, \text{ если } y = 5 \text{ при } x = 0.$$

Варианты № 2, № 7, № 12 и № 17

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$xy' - 3y = x^4;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$xy' - y = x^2 \cos x \text{, если } y = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = \frac{\pi}{2}.$$

Варианты № 3, № 8, № 13 и № 18

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$y' - 3y = e^{-x};$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$x^2 y' + 2xy = -4 \text{, если } y = -\frac{1}{2} \text{ при } x = -1.$$

Варианты № 4, № 9, № 14 и № 19

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$y' + 2xy = 2xe^{x^2};$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$xy^2 y' = x^3 + y^3 \text{, если } y = 3 \text{ при } x = 1;.$$

Варианты № 5, № 10, № 15 и № 20

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$xy' - y = -x;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$\left(1 + x^2\right) y' - xy = 2x \text{, если } y = 0 \text{ при } x = 0.$$

Вариант № 21 (Пример)

Задача № 1. Решить дифференциальное уравнение методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

$$x^2y' - 2xy = 3;$$

Задача № 2. Найти решение дифференциального уравнения методами И. Бернулли и Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной), удовлетворяющего указанным начальным условиям:

$$xy' + y = \sin x, \text{ если } y = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2};$$

Практическая работа № 5 «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1 порядка (Уравнение И. Бернулли)»:

Решить дифференциальное уравнение:

12. 47	$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$
12. 52	$1-2xyy'=y^3y'$
12.53	$y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y}$
12.54	$2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$
12.56	$xy'+2y+x^5y^3e^x=0$

Практическая работа № 5 (Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1 порядка (Уравнение И. Бернулли)): (стр. 328) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.52, 12.53, 12.54 и 12.56.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'+P\cdot y=Q\cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для *решения уравнения Бернулли* применяют подстановку $z=\frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, *уравнение Бернулли приводится к линейному*.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n}+P\frac{1}{y^{n-1}}=Q;$$

Применим подстановку, учтя, что

$$z'=-\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}}\cdot y'=-\frac{(n-1)y'}{y^n}.$$

$$-\frac{z'}{n-1}+Pz=Q$$

$$z'-(n-1)Pz=-(n-1)Q$$

т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$xy' + y = xy^2 \ln x.$$

Разделим уравнение на xy^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x.$$

Полагаем $z = \frac{1}{y}; \quad z' = -\frac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int\frac{dx}{x}}dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x\cdot\frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Пример 2. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Полагаем $z=\sqrt{y}$; $\quad z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y'$; $\quad y'=2\sqrt{y}z'$;

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z'-\frac{4}{x}z=x; \quad \frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2};$$

Получили *линейное неоднородное дифференциальное уравнение*. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=0; \quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}+C_1; \quad \ln z=2\ln x+\ln C; \quad z=Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx}=2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx}-\frac{2x^2C(x)}{x}=\frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=\frac{1}{2x}; \qquad C(x)=\frac{1}{2}\ln x+C_2;$$

Получаем:

$$z=x^2\left(C_2+\frac{1}{2}\ln x\right);$$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y=x^4\left(C_2+\frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

Практическая работа № 6 «Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах»:

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x,y)$.

Перед решением требуется проверить условие тотальности:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1.	$(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$
1(а)	$(e^x + y - \sin y)dx + (e^y + x + x\cos x)dy = 0$
1(б)	$\left(2x + e^{x/y}\right)dx + (1 - x/y)e^{x/y}dy = 0$
1(в)	$y' = (y - 3x^2)(4y - x)$

Решить дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях (т.е. решить задачу Коши)

2.	$(2x + y + 3x^2\sin y)dx + (x + x^3\cos y + 2y)dy = 0, y(0) = 2$
2(а)	$e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0, \quad y(-3) = 0$
2(б)	$xdx + ydy = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2), \quad y(1) = 1$
2(в)	$x + ye^x + (y + e^x)y' = 0, \quad y(0) = 4$

Ответы:

1.	$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y = C$	**2.**	$x^2 + xy + y^2 + x^3\sin y = 4$
1(а)	$e^x + e^y + xy + x\sin y = C$	**2(а)**	$xe^{-y} + y^2 + 3 = 0$
1(б)	$x^2 + ye^{x/y} = C$	**2(б)**	$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + arctg\frac{x}{y} = 1 + \frac{\pi}{4}$
1(в)	$x^3 - xy + 2y^2 = C$	**2(в)**	$x^2 + y^2 + 2ye^x = 24$

Практическая работа № 6 (Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах): (стр. 257-258) Практикум под. ред. Рябушко 2 часть. задачи: № 1а, № 1б, № 1в, № 2а, № 2б и № 2в.

Практическая работа № 7 «Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка» 1 часть:

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если *f(x)* – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

....

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

№ 1	$y^{IV} = 8/(x-3)^5$
№ 2	$y''' = x^2 - \sin x$
4155	$y'' = x + \sin x$
4156	$y'' = arctg\ x$
4157	$y'' = \ln x$
4208	$y''' = \frac{1}{x}$
4209	$y''' = \cos 2x$
646	$y''' sin^4 x = \sin 2x$
647	$y'' = 2\sin x\, cos^2 x - sin^3 x$

*Практическая работа № 7 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 1 часть*): (стр. 265 и 267) Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман: задачи: № 4155, № 4157, № 4208 и № 4209.*

*Практическая работа № 7 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 1часть*): (стр. 140) Высшая математика в управлениях и задачах В 2ч. Ч.2.: Учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова: задачи: № 646 и № 647.*

Найти решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

№ 3	$y'' = \frac{lnx}{x^2};\ \ y(1) = 3, y'(1) = 1$
643	$y'' = xe^{-x};\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$
644	$y^{IV} = cos^2x;\ y(0) = \frac{1}{32}, y'(0) = 0, y''(0) = \frac{1}{8}, y'''(0) = 0.$
645	$y''' = x\sin x; y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2.$
648	$y''' = xe^{-x};\ y(0) = 0, y'(0) = 2,\ y''(0) = 2$

*Практическая работа № 7 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 1часть*): (стр. 140) Высшая математика в управлениях и задачах В 2ч. Ч.2.: Учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова: задачи: № 644, № 645 и № 648.*

Практическая работа № 8 «Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка» 2 часть:

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k–1 включительно

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \ldots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное ДУ проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Если дифференциальное второго порядка уравнение имеет вид $F(x, y', y'') = 0$

т.е. в запись уравнения не входит искомая функция $y=y(x)$, то понижение порядка достигается с помощью замены $z = y'$

12. 60	$y'' = y'ctgx$
12. 62	$y'' = -\frac{x}{y'}$
12. 63	$xy'' + y' = 0$
12. 64	$xy'' = y'ln\frac{y'}{x}$

*Практическая работа № 8 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 2 часть*): (стр. 331) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.62, № 12.63 и 12.64.*

Уравнения, не содержащие явно не зависимой переменной

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Если уравнение второго порядка имеет вид $F(y, y', y'') = 0$, то используется также замена $y' = p$.

12.61	$yy'' = y^2 y' + (y')^2$
12.65	$yy'' - y'(1 + y') = 0$
12.66	$yy'' = (y')^2$

*Практическая работа № 8 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 2 часть*): (стр. 331) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.65 и № 12.66*

Найти решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

12. 70	$(y''x - y')y' = x^3;\ \ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
12. 71	$2y(y')^3 + y'' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$

*Практическая работа № 8 (*Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка 2 часть*): (стр. 331) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.70 и № 12.71.*

Практические работы № 9 «Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»:

Решение дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$$

будем искать в виде $y=e^{kx}$, где k = *const.*

т.к. $y'=ke^{kx}$; $\quad y''=k^2e^{kx}$; $\quad \ldots \quad y^{(n)}=k^ne^{kx}$, то

$$L(e^{kx})=e^{kx}(k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n).$$

При этом многочлен $F(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n$ называется *характеристическим многочленом дифференциального уравнения*

Общее правило нахождения решения линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений:

$$e^{kx};\quad xe^{kx};\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

4251	$y'' + y' - 2y = 0$	**4252**	$y'' - 9y = 0$
4253	$y'' - 4y' = 0$	**4254**	$y'' - 2y' - y = 0$
4255	$3y'' - 2y' - 8y = 0$	**4256**	$y'' + y = 0$
4257	$y'' + 6y' + 13y = 0$	**4258**	$4y'' - 8y' + 5y = 0$
4259	$y'' - 2y' + y = 0$		

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

4262	$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 6, y'(0) = 10$
4263	$y'' + 4y' + 29y = 0; \quad y(0) = 6, y'(0) = 15$
4264	$4y'' + 4y' + y = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$

*Практическая работа № 9 (*Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*): (стр. 271) Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман: задачи: № 4252, № 4253, № 4254, № 4255, № 4256, № 4257, № 4258, № 4259, № 4262 и № 4264.*

Практические работы № 10 «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»:

Линейное, неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (с постоянными коэффициентами) имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

где p и q – некоторые действительные числа, $r(x)$- некоторая функция.

Найти решение уравнений:

12.74	$y'' + 2y' - 3y = xe^{2x}$	**12.75**	$y'' - 2y' + y = (x-1)e^{x}$
12.76	$y'' - 2y' + 5y = e^{x}\cos x$	**12.77**	$y'' + y = \sin 3x + \sin x$
12.80	$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$	**12.81**	$y'' + y' - 6y = xe^{2x}$
12.82	$y'' + y' = \cos x$	**12.83**	$y'' + y' = sin^2 x$
12.84	$y'' - 3y' = x + \cos x$		

*Практическая работа № 10 (*Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*): (стр. 337) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.75, № 12.80, № 12.81, № 12.82, № 12.83 и № 12.84.*

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

12.87	$y'' + y = 4\sin x; \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$
12.88	$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
12.89	$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}; \quad y(1) = e, y'(1) = 3e$

*Практическая работа № 10 (*Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*): (стр. 337 - 338) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 12.87, № 12.88 и № 12.89.*

Контрольная работа № 1 по разделу «Дифференциальные уравнения»:

Вариант № 1

Решить дифференциальные уравнения:

№ 1	$2xy' + y^2 = 1$
№ 2	$x^2y' = y(x+y)$
№ 3	$xy' + y = \sin x$
№ 4	$y''' = \sin^2 2x$
№ 5	$y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

№ 6	$y' = xe^{-y}; \quad y(1) = 0$
№ 7	$y'' - 2y' = x^2 - 1; \ y(0) = 0, y'(0) = 9/4$

Вариант № 2

Решить дифференциальные уравнения:

№ 1	$(1 - x^2)dy + xydx = 0$
№ 2	$x^2(dy - dx) = (x+y)ydx$
№ 3	$y' + y = e^{-x}$
№ 4	$y''' = \cos^2 3x$
№ 5	$y'' - 2y' + 2y = x\cos x$

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

№ 6	$x\sqrt{9 - x^2}dx - y\sqrt{4 + x^2}dy = 0; \quad y(0) = 0$
№ 7	$y'' + 4y = 5e^x; \ y(0) = 0, y'(0) = 3$

Вариант № 3

Решить дифференциальные уравнения:

№ 1	$(x+1)y' + y = \cos x$
№ 2	$x^2y' - 2xy = 3y$
№ 3	$y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$
№ 4	$y''' = \sin x \cos x$
№ 5	$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

№ 6	$y'(1 + x^2) - xy = 2x; \quad y(0) = 0$
№ 7	$y'' + 9y = 15 \sin 2x\,; \;\; y(0) = -7, y'(0) = 0$

Практическая работа № 12 «Числовые ряды. Предельный признак сравнения»:

Теорема_3 (предельный признак сравнения). Если $u_n > 0,\quad v_n > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$*, где h – число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, будем называть *эталонным*.

Наиболее часто в качестве эталонного ряда используют:

a) гармонический ряд (он расходится):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

b) обобщенный гармонический ряд (при $\alpha > 1$ он сходится, при $\alpha < 1$ он расходится):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Исследовать сходимость ряда с помощью предельного признака сравнения. В качестве эталонного ряда рассмотреть ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$. В ответе указать также подходящее значение α.

№ 1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n^3-n-25}$	**№ 2**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sqrt{n^7+3}}{n^4+\sqrt[3]{n^5+10}}$
№ 3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)$	**13. 17**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-10}$
13. 18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-7n+10}{3n^5+10n-12}$	**13. 19**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^5+11}}{n^3-7n-1}$
13. 20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+7}}{\sqrt{4n^2+11n}}$	**13. 21**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[5]{n^{15}+14n^{11}+1}}$
13. 24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3n+1}\right)$	**13. 25**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{4}{n^3+7}\right)$

Практическая работа № 12 (Предельный признак сравнения): (стр. 356) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 13.17, № 13.18, № 13.19, № 13.20, № 13.21, № 13.24 и № 13.25.

Практическая работа № 13 «Числовые ряды. Предельный признак Даламбера. Радикальный признак Коши»:

Признак Даламбера

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера

Предельный признак Даламбера является следствием признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Признак Коши (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при *$\rho<1$ ряд сходится*, а при *$\rho>1$ ряд расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Исследовать сходимость рядов с помощью придельного признака Даламбера. Сделать вывод о поведении ряда (в ответе указать полученное число ρ):

№ 1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$	**№ 2**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$
№ 3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$	**13. 39**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+7}$
13. 41	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+1)}$	**13. 42**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$
13. 45	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n+n^2}$	**13. 46**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$
13. 49	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{3^n}$		

Практическая работа № 13 (Предельный признак Даламбера): (стр. 357) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 13.39, № 13.41, № 13.42, № 13.45, № 13.46 и № 13.49.

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши. Сделать вывод о поведении ряда (в ответе указать полученное число ρ):

№ 4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{4n^2-4}\right)^n$	**№ 5**	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^n$
13. 47	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n$	**13. 50**	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n$

Практическая работа № 13 (радикальный признак Коши): (стр. 357) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 13.47 и № 13.50.

Пример_7. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, *если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю*.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, *необходимое условие сходимости не выполняется, значит*, *ряд расходится.*

Практическая работа № 14 «Знакопеременные ряды»:

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \text{ где } u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Признак Лейбница

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема 1. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Ряд $\sum u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |u_n|$ очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Ряд $\sum u_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет *абсолютно сходящимся*, а при $\rho>1$ ряд будет *расходящимся*. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет *абсолютно сходящимся,* а при $\rho>1$ ряд будет *расходящимся.* При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Выяснить, какие из данных рядов являются сходящимися, а какие – расходящимися. Для сходящихся рядов определить, сходятся они абсолютно или условно:

№ 1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+7}$	**№ 2**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n+n^3}$
№ 3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n n}{3^n n^2+1}$		
13. 71	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$	**13. 72**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^3+10}$
13. 73	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+7}}$	**13. 74**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$
13. 75	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{4^n+7}$	**13. 76**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\cdot 2^n}{n^3+1}$
13. 77	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+7}$	**13. 78**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{10-n\cdot 3^n}$
13. 81	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n+5}{4n-15}\right)^n$	**13. 82**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n$

Практическая работа № 14 (Знакопеременные ряды): (стр. 361) Практикум под. ред. Кремера. задачи: № 13.71, № 13.72, № 13.74, № 13.75, № 13.76, № 13.77, № 13.78 и № 13.82.

Практическая работа № 15 «Степенные ряды»:

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера или признак Коши.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Для каждого степенного ряда существует такое положительное число *R*, что при всех *x* таких, что $|x| < R$ *ряд абсолютно сходится,* а при всех $|x| > R$ *ряд расходится*. При этом число *R* называется *радиусом сходимости*. Интервал *(-R, R)* называется *интервалом сходимости*.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Исследовать сходимость степенных рядов:

№ 1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$
№ 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \cdots$
364	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$
365	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$

368	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}=\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{3!}+\frac{(x+1)^3}{5!}+\cdots+\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}+\cdots$
370	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}=\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots$
371	$\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n=x+(2x)^2+(3x)^3+\cdots+(nx)^n+\cdots$
373	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n}+\cdots$

Найти суммы степенных рядов:

367	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$, если $\lvert x\rvert<1$
378	$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\cdots$, если $\lvert x\rvert<a$
379	$\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}+\cdots$, если $-a\le x<a$
381	$-2x+4x^3-6x^5+\cdots+(-1)^n\cdot 2n\cdot x^{n-1}+\cdots$, если $\lvert x\rvert<1$

Практическая работа № 15 (Степенные ряды): (стр. 86) Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч2: Учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я Кожевникова. Задачи: № 368, № 370, № 371, № 373, № 378, № 379 и № 381.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс : учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 960 с. — ISBN 978-5-8114-0445-2.— URL: https://e.lanbook.com/book/167722.
2. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата : учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 472 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072296.

Дополнительная литература

1. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тишин [и др.]; под. ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., пер. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2010.- 479с.- ISBN 978-5-238-00991-9..
2. Высшая математика для экономистов : практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тишин [и др.]; под. ред. Н.Ш. Кремера.- 2-е изд., пер. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2010.- 479с.- ISBN 978-5-238-01122-6..
3. Шипачев, В.С. Высшая математика : учебник и практикум / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова.-8-е изд., перераб. и доп.- М.: Издательство Юрайт, 2017.- 447 с. - ISBN 978-5-9916-3600-1.
4. Кытманов, А. М. Математика. Адаптационный курс : учебное пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-1472-7. — URL: https://e.lanbook.com/book/168480.
5. Антонов, В. И. Элементарная математика для первокурсника : учебное пособие / В. И. Антонов, Ф. И. Копелевич. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 112 с. — ISBN 978-5-8114-1413-0. — URL: https://e.lanbook.com/book/168501.