МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФИЛИАЛ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. НИЖНЕВАРТОВСКЕ
Кафедра «Гуманитарные, естественно-научные и технические дисциплины»

Ю.А. Захарова

Математические методы в организации транспортных процессов

Методические указания по разделу «Линейное программирование» дисциплин «Математические методы в организации транспортных процессов», «Математическое моделирование» для всех форм обучения и направлений подготовки

НИЖНЕВАРТОВСК
2023

ББК 22.18+39
М 34

Одобрено
редакционно-издательским советом филиала

Математические методы в организации транспортных процессов: методические указания по разделу «Линейное программирование» дисциплин «Математические методы в организации транспортных процессов», «Математическое моделирование» для всех форм обучения и направлений подготовки / сост. Ю.А. Захарова. – Нижневартовск, 2023. – 34 с.

Задания составлены для всех форм обучения и направлений подготовки для формирования компетенций, предусмотренных РПД.

Содержание

Самостоятельная работа

Блок заданий для самостоятельной работы (далее СРС) по дисциплине «Математические методы в организации транспортных процессов» включает выполнение практических заданий по теме «Линейное программирование».

Результатом выполнения практических заданий является освоение основных положений курса и приобретение навыков в профессиональной деятельности. Структура пояснительной записки должна быть определена следующей последовательностью частей:

- Титульный лист;
- Оглавление;
- Основная часть;
- Учебно-методическое и информационное обеспечение.

Основная часть пояснительной записки СРС должна содержать следующие разделы и подразделы для заданий:

- Постановка задачи;
- Решение задачи с обоснованием выбора метода решения;
- Численные расчет и анализ результатов (выводы).

Одноиндексные задачи линейного программирования

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования.

Линейное программирование (ЛП) – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремуму (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений

К задачам ЛП сводится широкий круг вопросов планирования транспортных и экономических процессов, где ставится задача поиска оптимального решения.

В общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) ставится следующим образом:

Найти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, максимизирующий (минимизируюший) линейную форму (ЛФ):

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \times x_j \to \max(\min) \quad (1.1)$$

и удовлетворяющий, условиям ((1.2) - это система линейных уравнений или неравенств):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times x_j \le (\ge, =) b_i \quad (1.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n. \quad (1.3)$$

Линейная функция $f(X)$ называется целевой функцией (ЦФ) задачи.

Условия (1.2) называют функциональными, а (1.3) – прямыми ограничениями задачи.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ компоненты, которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть планом, или допустимым решением ЗЛП.

Все допустимые решения образуют область определения ЗЛП, или область допустимых решений.

Допустимое решение, максимизирующее (минимизирующее) ЦФ $f(X)$, называется оптимальным планом задачи.

$$f(X^*) = \max(\min)\, f(X),$$

Где $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ - оптимальный план ЗЛП.

Если система ограничений состоит лишь из нестрогих неравенств, то это – стандартная задача ЛП.

Если система ограничений состоит лишь из равенств, то это – каноническая задача ЛП.

Переход от стандартной задачи к канонической осуществляется добавлением новых неотрицательных переменных (неосновные переменные) со знаком «+» для неравенств «≤» и со знаком «-» для неравенств со знаком «≥»[1]

[1] Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Плотникова.- Изд. испр. и доп.- М.: Вузовский учебник, 2008.- 365с.- ISBN 978-5-9558-0052-3.

Примеры составления линейной модели

Задача оптимального использования ресурсов

В распоряжении фабрики имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п.
Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), сырье (480 кг) и оборудование (130 станков /час).

Фабрика может выпускать ковры 4-х видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятиям от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Ковер «1»	Ковер «2»	Ковер «3»	Ковер «4»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена ед. изделия (тыс. руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Экономико – математическая модель задачи оптимального использования ресурсов

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 число ковров каждого типа.

Целевая функция – это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$$

Ограничения по ресурсам:

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80,$$

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Задача о диете[2]

Используются 2 вида продуктов X и Y. 1 кг продукта X стоит 6 у.е. , содержит 9 единиц питательного вещества A и 17 единиц питательного вещества B. 1 кг продукта Y стоит 8 у.е. , содержит 12 единиц питательного вещества A и 23 единиц питательного вещества B. Необходимый минимум в диете 20 единиц (вещество A) и 30 единиц (вещество B). Составить диету минимальной стоимости.

Экономико – математическая модель задачи о диете

[2] Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Плотникова.- Изд. испр. и доп.- М.: Вузовский учебник, 2008.- 365с.- ISBN 978-5-9558-0052-3.

Обозначим через x_1, x_2 число продуктов каждого типа.

Целевая функция (общая стоимость) – это выражение, которое необходимо минимизировать:

$$f(X) = 6x_1 + 8x_2 \to \min$$

Ограничения по ресурсам:

$9x_1 + 12x_2 \ge 20$, (содержание *вещества* A)

$17x_1 + 23x_2 \ge 30$, (*содержание вещества* B)

$x_1, x_2 \ge 0$.

Графический метод решения задач ЛП

Геометрический метод применяется, если задача ЛП содержит только две переменные.

Рисуем *область допустимых решений* (ОДР) и график ЦФ. Сдвигаем график ЦФ параллельным переносом в направлении вектора нормали (для задач максимизации) или противоположном направлении (для задач минимизации).

Последняя общая точка сдвинутого графика ЦФ и ОДР и есть решение задачи.

Возможно, что график совпадает с одним из отрезков, ограничивающих допустимую область решений. В этом случае решений будет бесконечно много.

Пример. Решим геометрически задачу.

$$f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (1.5)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \le 5, x2 \le 7, \\ \quad x_1, x2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Построим область допустимых решений (ОДР) соответствующую системе неравенств (1.6).

Для этого, заменив каждое из неравенств равенством:

$x_1 + 3x_2 = 18$ (1-я прямая)

$2x_1 + x_2 = 16$ (2-я прямая)

$x_1 = 5$ (3-я прямая)

$x2 = 7$ (4-я прямая)

строим граничную линию.

Вместо неравенства $x_1 + 3x_2 \le 18$ рассмотрим прямую $x_1 + 3x_2 = 18$. Изобразим её график. Как известно, наша прямая делит плоскость на две полуплоскости.

Возьмем в любой из полуплоскостей точку (обычно берут начало координат O(0,0)) и подставим её координаты в неравенство $x_1 + 3x_2 \le 18$. Если координаты точки удовлетворяют этому неравенству, то вся полуплоскость, где лежит эта точка, является решением этого неравенства. Если нет, то решением этого неравенства является другая полуплоскость.

Учитывая, что $x_1, x2 \geq 0$, получим заштрихованную часть плоскости, образующую многоугольник решений

И т.д. для других ограничений. Получим ОДР – многоугольник OABCDE.

Затем строим прямую (линию уровня) $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$ и вектор нормали n=(2,3) к этой прямой, которые взаимно перпендикулярны. Координаты вектора нормали – это коэффициенты ЦФ. Нетрудно показать, что вектор нормали дает направление наибольшего возрастания линейной функции (ЦФ).

Действительно

$$F_O = 2x1 + 3x2 = 2*0 + 3*0 = 0$$

$$F_A = 2x1 + 3x2 = 2*0 + 3*5 = 15$$

$$F_B = 2x1 + 3x2 = 2*3 + 3*5 = 21$$

$$F_C = 2x1 + 3x2 = 2*6 + 3*4 = 24$$

и т.д.

Так как у нас задача максимизации, то передвигаем параллельно прямую $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$ в направлении вектора n.

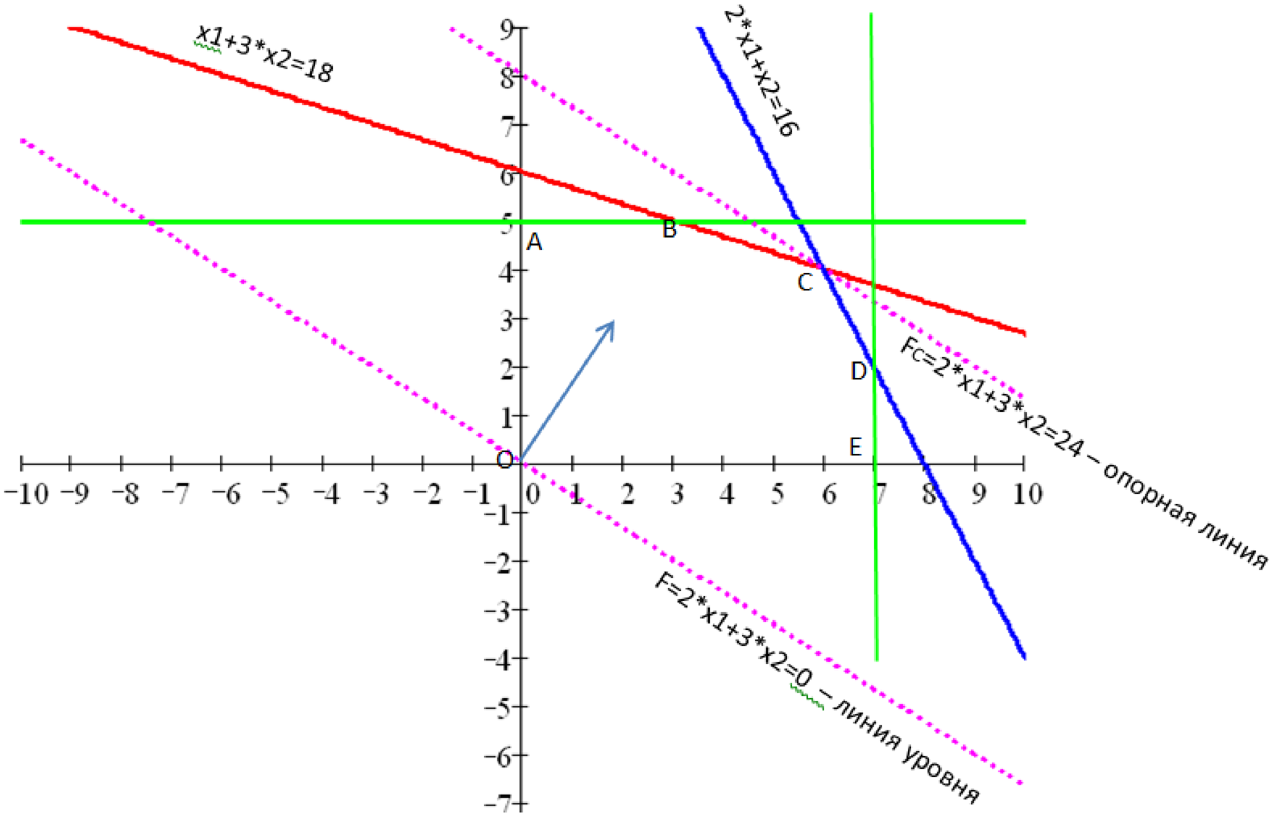
Из всех линий уровня выбираем две, одна из которых проходит через точку O и дает min значение функции F, а другая проходит через точку C и функция F для неё принимает max значение. Эти линии уровня называют опорными.

Точка C образована первой и второй прямыми. Последняя общая точка сдвинутого графика и ОДР многоугольника OABCDE – это точка C (точка пересечения прямых $x_1 + 3x_2 = 18$ и $2x_1 + x_2 = 16$). Найдем её координаты.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Координаты точки C x1=6, x2=4

При этом Fmax=2*6+3*4=24 у.е.


x1+3*x2=18
2*x1+x2=16
A
B
C
D
E
O
Fc=2*x1+3*x2=24 – опорная линия
F=2*x1+3*x2=0 – линия уровня

Методические рекомендации по решению одноиндексных задач линейного программирования в MS Excel

Задание. Задача планирования производства

Завод выпускает два вида дорожных плит (**I** и **II**). Для их изготовления используется два вида сырья (**А**,**В**), запасы которых составляют $6+2\times\alpha$ и $8+2\times\alpha$ т. Расходы сырья для плиты **I** составляют 1т. и 2т., соответственно, для вида плит **II** 2т. и 1т**.** Изучение рынка сбыта показало, что спрос на плиты вида **I** не превышает $\alpha+1$ шт. Оптовые цены одной плиты равны: $20+\alpha$ долл. для плиты вида **I**, $30+\alpha$ долл. для плиты вида **II**. Какое количество плит каждого вида надо производить заводу, чтобы доход от реализации продукции был максимальным ?

(α = 10).

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

1. Построение математической модели

Обозначим через:

x1 – количество выпускаемых плит типа I;

x2 – количество выпускаемых плит типа II.

Тогда

x1*1+x2*2 – количество потраченного сырья А;

x1*2+x2*1 – количество потраченного сырья В.

Прибыль составит: $x1\times(20+\alpha)+x2\times(30+\alpha)$

Запасы сырья не должны превышать имеющихся. Получаем следующие ограничения по сырью:

$x1\times1+x2\times2\le 6+2\times\alpha$

$x1\times2+x2\times1\le 8+2\times\alpha$

Прибыль (*Целевая Функция*) должна стремиться к максимуму.

Математическая модель:

Необходимо найти x1, x2 – количество выпускаемых плит вида I и вида II.

Целевая функция (общая стоимость) – это выражение, которое необходимо максимизировать.

$$F(X)=(20+\alpha)\times x1+(30+\alpha)\times x2\to\max$$

$$\begin{cases} x1\times1+x2\times2\le 6+2\times\alpha \\ x1\times2+x2\times1\le 8+2\times\alpha \\ x1,x2\ge0, \quad x1\le\alpha+1 \end{cases}$$

Пусть $\alpha=10$ т.е. получим:

$F(X)=30\times x1+40\times x2\to\max$

Ограничения:

$$\begin{cases} x1\times1+x2\times2\le 26 \\ x1\times2+x2\times1\le 28 \\ x1,x2\ge0, \quad x1\le 11 \end{cases}$$

Выполните добавление надстроек (Пакет Анализа и Поиск решения) на основную вкладку Данные*:* Основная Вкладка Файл →команда Параметры →в окне выберите команду Надстройки →для добавления *Активных надстроек приложений* (например, таких как Пакет Анализа или Поиск решения) требуется использовать кнопку *Перейти* →далее в окне Надстройки установите флажки рядом с подключаемыми надстройками.

Решение задачи, с использованием средства Поиска решения электронных таблиц Excel.

Организуйте данные так, как это показано на рис 1:

	A	B	C	D	E
1	Задача планирования производства				
2					
3	виды сырья	виды плит		запасы сырья	
4		I	II		
5	A	1	2	26	
6	B	2	1	28	
7	Оптовая цена ед. изделия	30	40		
8					
9					
10		переменные	x1	x2	
11			0	0	
12					
13	целевая функция(доход)				
14	30*x1+40*x2	{=СУММПРОИЗВ(B7:C7;C11:D11)}			
15	ограничения				
16	1*x1+2*x2	{=C11+2*D11}			
17	2*x2+1*x1	{=2*C11+D11}			
18	x1>=0	{=C11}			
19	x2>=0	{=D11}			
20	x1<=11	{=C11}			

Рис 1. Задача планирования производства (организация данных)

Найдите максимум целевой функции и переменные решения с помощью «Поиска решения» Excel: Откройте окно диалога «*Параметры поиска решения*»: вкладка Данные →группа элементов Анализ → Поиск решения; в окне диалога «*Параметры поиска решения*» задайте (рис 2.):

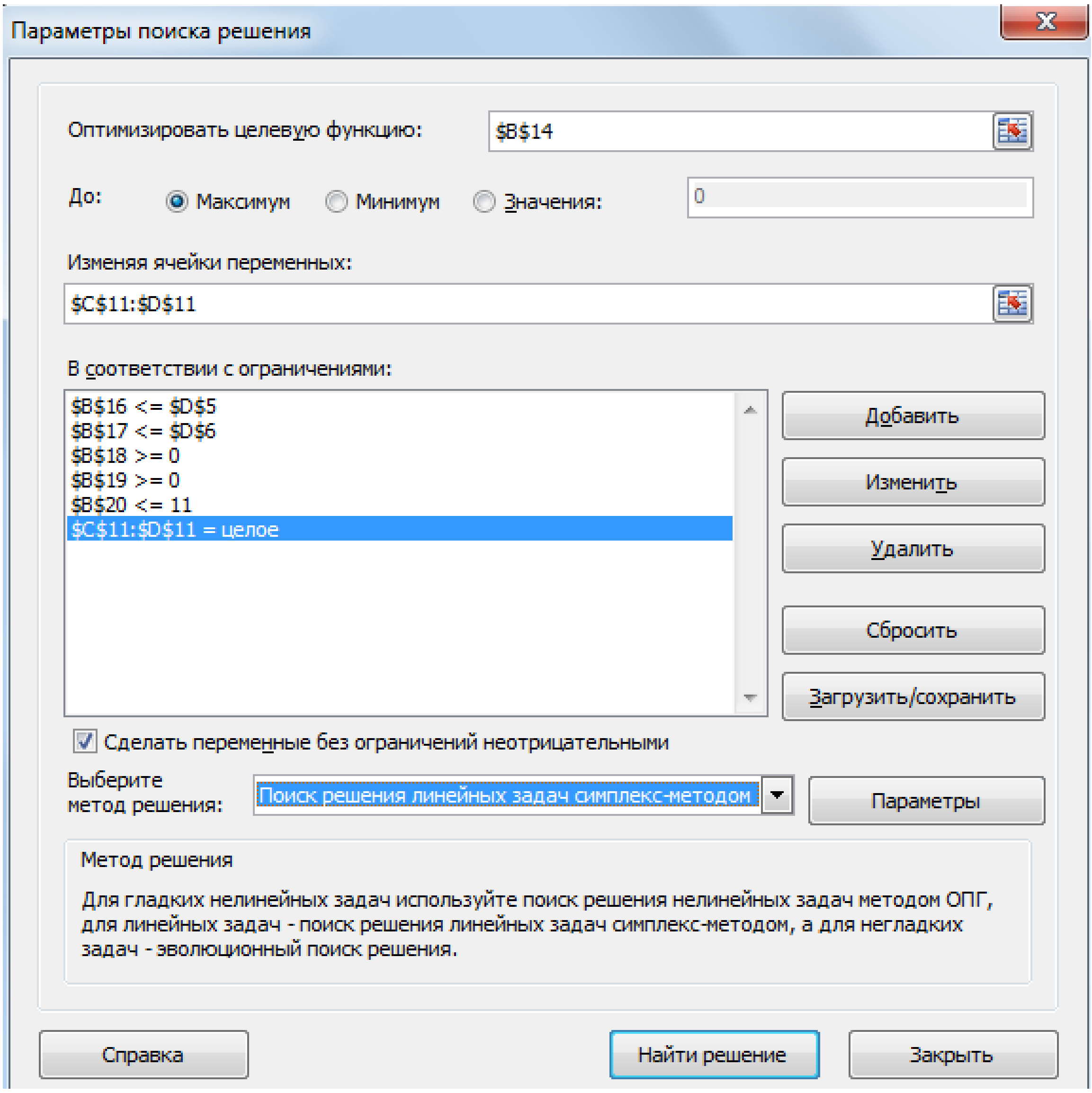


Рис 2. Задание ограничений в окне диалога Параметры поиска решения(Excel 2010)

Щелкните по кнопке *Параметры* в окне диалога *Параметры* задайте *параметры решения задачи ЛП*.

	A	B	C	D	E
1	**Задача планирования производства**				
2					
3	**виды сырья**	**виды плит**		**запасы сырья**	
4		**I**	**II**		
5	**A**	1	2	26	
6	**B**	2	1	28	
7	**Оптовая цена ед. изделия**	30	40		
8					
9					
10		**переменные**	**x1**	**x2**	
11			10	8	
12					
13	**целевая функция(доход)**				
14	**30*x1+40*x2**	**620**			
15	**ограничения**				
16	**1*x1+2*x2**	**26**			
17	**2*x2+1*x1**	**28**			
18	**x1>=0**	**10**			
19	**x2>=0**	**8**			
20	**x1<=11**	**10**			

Рис 3. Результаты решения с помощью Подбора параметра

Чтобы получить максимальную прибыль (620 долл.) заводу выгодно изготовить 10 плит типа I и 8 плит типа II.

Двуиндексные задачи линейного программирования

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и ЦФ задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей ЛП[3].

Транспортная задача.

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач ЛП и находит широкое практическое применение.

Постановка транспортной задачи.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у n поставщиков A_i в количестве a_i (i=1,…,n) единиц, необходимо доставить m потребителям B_j в количестве b_j (j=1,…,m) единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика i к потребителю j.

Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Экономико – математическая модель транспортной задачи.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от поставщика i к потребителю j. Так как от поставщика i к потребителю j запланировано перевезти x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij} \times x_{ij}$.

Транспортная задача относится *к двуиндексным задачам* ЛП, так как в результате решения задачи необходимо найти матрицу X с компонентами x_{ij}.

Математическая постановка задачи:

ЦФ: $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \to \min$ (2.1) (стоимость всего плана)

при ограничениях

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$, i=1,…,n (2.2) (все грузы должны быть перевезены)

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i$, j=1,…,m (2.3) (все потребности должны быть удовлетворены)

$x_{ij} \geq 0, i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m$ (2.4)

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (2.4)$$

---

[3] Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Плотникова.- Изд. испр. и доп.- М.: Вузовский учебник, 2008.- 365с.- ISBN 978-5-9558-0052-3.

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (2.4), называется закрытой моделью; в противном случае – открытой.

Для открытых моделей может быть два случая:

А) суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j;$$

Б) суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

В математической модели ЛФ одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \to \min$$

При *ограничениях в случае «а»*

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i \text{ , i=1,…,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i \text{ , j=1,…,m}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m$$

При *ограничениях в случае «b»*

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \text{ , i=1,…,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_i \text{ , j=1,…,m}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае «а», когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого описывается формулой

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

В случае «b», когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого описывается формулой

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагают равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет n+m уравнений с n×m неизвестными.

Матрицу перевозок $X = \left(x_{ij}\right)_{nm}$, удовлетворяющую условиям (2.2) – (2.4), называют *планом перевозок транспортной задачи*, а x_{ij} - перевозками.

План X^*, при котором ЦФ (2.1) обращается в минимум, называется *оптимальным*.

Примеры транспортной задачи

Пример 1. Пусть имеются 4 поставщика и 5 потребителей. Издержки перевозки единицы груза от i – го поставщика в j – й пункт назначения, запасы поставщиков и заказы потребителей даны в таблице. Оптимизировать план перевозок.

Внутри прямоугольника заданны $-c_{ij}$ (стоимость перевозки единицы груза от поставщика **i** к потребителю **j)**; справа - a_i (запасы i –го поставщика); снизу - b_j заказы (объем потребления) j – го потребителя.

В данной задаче суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 128$$

Исходные данные **Потребители**

Поставщики

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы (объем производства)
A_1	13	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Заказы (объем потребления)	18	27	42	26	15	

Элементы модели

Переменные решения (матрица перевозок)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы (объем производства)
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	30
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	48
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	20
A_4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	30
Заказы (объем потребления)	18	27	42	26	15	

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} \times x_{ij} = c_{11} \times x_{11} + c_{12} \times x_{12} + c_{13} \times x_{13} + c_{14} \times x_{14} + \ldots + c_{45} \times x_{45}$$

Поставщики (Bj)	Потребители (Ai)
$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=30$	$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=18$
$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=48$	$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=27$
$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=20$	$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=42$
$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=30$	$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=15$

Задача о назначениях

Задача о назначениях - это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна машина и т.д.) и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе.[4]
Т.е. ресурсы неделимы между работниками, а работы не делимы между ресурсами.

Таким образом, задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи.

Задача о назначениях имеет место при распределении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям и т.п.

Исходные параметры задачи о назначениях

Таблица 2.2.1.1*. Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях*

Ресурсы / Ресурсы (рабочие)	Виды работ					Кол-во ресурсов (рабочих)
	B_1	B_2	B_3	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2m}	1
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	…	c_{3m}	1
…						…
A_n	c_{41}	c_{42}	c_{43}	…	c_{nm}	1
Кол – во работ	1	1	1	…	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Строка с видами работ может быть написана снизу

Где **n** – количество ресурсов; **m** - количество работ;

$a_i=1$ - единичное кол-во ресурса $A_{i}, \; i=1,\dots,n$ (например, один работник и т.д.);

---

[4] Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Плотникова.- Изд. испр. и доп.- М.: Вузовский учебник, 2008.- 365с.- ISBN 978-5-9558-0052-3.

$b_j = 1$ - единичное кол-во работы B_j, $j=1,...,m$ (например, одна должность, один маршрут);

c_{ij} - характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i (стоимость выполнения работ)

Например: компетентность работника **i** при работе на должности **j**; время, за которое транспортное средство **i** перевезет груз по маршруту **j**; степень квалификации лаборатории **i** при работе над научной темой **j**.

Математическая постановка задачи о назначениях:

$Z(\bar{x})$ - обща (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Искомые параметры:

x_{ij} - факт назначения или не назначения ресурса A_i на работу B_j:

ЦФ: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \to \min$ (1)

при ограничениях

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, i=1,…,n (2)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$, j=1,…,m (3)

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если ресурс i не назначен на работу j} \\ 1, & \text{если ресурс i назначен на работу j} \end{cases}$$

Решение задачи возможно, когда количество ресурсов (рабочих) совпадает с количеством работ.

Если задача является не сбалансированной т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$:

1. количество работ превышает количество ресурсов (рабочих), поэтому вводится дополнительный ресурс (рабочий) с заведомо высокими штрафными стоимостями выполнения работ (строка в таблице стоимостей выполнения работ)
2. количество ресурсов (рабочих) превышает количество работ поэтому вводится дополнительная работа с заведомо высокими штрафными стоимостями выполнения работ (столбец в таблице стоимостей)

Пример *Задача о назначении*

Имеется n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij}, выполнения i рабочим j работы приведена в таблице, где рабочему соответствует строка, а работе столбец. Необходимо составить план выполнения работ таким образом, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а сумма стоимости выполнения работ была минимальной.

Рабочие \ Виды работ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Кол-во рабочих
A_1	3	6	2	5	11	1 (a1)
A_2	1	2	7	11	3	1 (a2)
A_3	5	12	11	9	1	1 (a3)
A_4	2	4	2	10	5	1 (a4)
Кол – во работ	1 (b1)	1(b2)	1(b3)	1 (b4)	1 (b5)	

Математическая постановка задачи о назначениях:

ЦФ: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \to \min$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \; i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j=1,\ldots,m$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если рабочий i не назначен на работу j} \\ 1, & \text{если рабочий i назначен на работу j} \end{cases}$$

Наша задача является не сбалансированной т.к. $\sum_{i=1}^{4} a_i \neq \sum_{j=1}^{5} b_j$:

количество работ превышает количество рабочих,

поэтому вводится дополнительный рабочий с заведомо высокими штрафными стоимостями выполнения работ (строка в таблице стоимостей выполнения работ).

Рабочие \ Виды работ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Кол-во рабочих
A_1	3	6	2	5	11	1 (a1)
A_2	1	2	7	11	3	1 (a2)
A_3	5	12	11	9	1	1 (a3)
A_4	2	4	2	10	5	1 (a4)
$A_{5доп.}$	13	13	13	13	13	1 (a5)
Кол – во работ	1 (b1)	1(b2)	1(b3)	1 (b4)	1 (b5)	

Результаты решения приведены в следующей таблице:

Рабочие	Виды работ					Кол-во рабочих
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	0	0	1	0	0	1
A_2	0	1	0	0	0	1
A_3	0	0	0	0	1	1
A_4	1	0	0	0	0	1
$A_{5доп.}$	0	0	0	1	0	1
Кол – во работ	1	1	1	1	1	

Вывод: рабочий A_1 выполнил работу B_3, рабочий A_2 выполнил работу B_2, рабочий A_3 выполнил B_5, рабочий A_4 выполнил B_1. Работа B_4 остается не выполненной.

Суммарная стоимость работ $Z(\overline{x})$= 20 у.е. Штраф за не выполнение работы 13 у.е. Реальная стоимость работ составляет 7 у.е.

$Z(\overline{x})$=2+2+1+1+13=20 у.е.

По сравнению с транспортной задачей процесс приведения задачи о назначении к сбалансированному виду имеет свои особенности (принимает значение «0» или «1»). Для этого необходимо при вводе ограничений указать тип переменных - Двоичное.

При решении задач о назначении в Excel необходимо учитывать, что переменные x_{ij} являются булевыми.

Методические рекомендации по решению двуиндексных задач линейного программирования в MS Excel

Решение транспортной задачи в MS Excel

Задача. Пусть имеются 4 поставщика и 5 потребителей. Издержки перевозки единицы груза от i – го поставщика в j – й пункт назначения, запасы поставщиков и заказы потребителей даны в таблице. Оптимизировать план перевозок.

Внутри прямоугольника заданны - c_{ij} (стоимость перевозки единицы груза от поставщика i к потребителю j); справа - a_i (запасы i –го поставщика); снизу - b_j заказы (объем потребления) j – го потребителя.
В данной задаче суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 128$$

Исходные данные **Потребители**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы (объем производства)
A_1	13	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Заказы (объем потребления)	18	27	42	26	15	

Математическая постановка задачи:

ЦФ: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \min$ (2.1) (стоимость всего плана)

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \,,\ i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \,,\ j=1,\ldots,m$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m$$

Решение задачи с MS Excel

Организуйте данные так, как это показано на рис 1:

1. В ячейки I4:I7 введите – суммы произведения цены перевозки единицы груза на объем перевозки от i-го поставщика к любому потребителю:
2. В ячейку I4 введите формулу: = СуммПроизв(B4:F4;B13:F13);
3. выполните автозаполнение формулой из ячейки I4 столбца I до ячейки I7 включительно.

4. В ячейку I9 введите - сумму этих сумм (т.е. двойная сумма) – целевую функцию, которую нужно минимизировать: =СУММ(I4:I7).
5. В ячейках B18: F18 введите – ограничения на количество груза, которое нужно перевести к каждому потребителю($\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i$):
6. В ячейку B18 введите формулу: =СУММ(B13:B16)-B17
7. выполните автозаполнение формулой из ячейки B18 18 строки до ячейки F18 включительно
8. В ячейках H13: H17 введите – ограничения на количество груза, которое нужно увезти от каждого поставщика($\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$):
9. В ячейку H13 введите формулу: =СУММ(B13:F13)-G13;
10. выполните автозаполнение формулой из ячейки H13 столбца H до ячейки H17 включительно;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Транспортная задача**								
2		***Исходные данные***							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**Запасы (объем производства)**		
4	**A1**	13	7	14	7	5	30		{=СУММПРОИЗВ(B4:F4;B13:F13)}
5	**A2**	11	8	12	6	8	48		0
6	**A3**	6	10	10	8	11	20		0
7	**A4**	14	8	10	10	15	30		0
8	**Заказы (Объем потребления)**	18	27	42	26	15			
9				**Суммарные издержки (ЦФ):**					{=СУММ(I4:I7)}
10									
11		***Переменные решения (матрица перевозок)***							
12		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**Объем производства**		**Ограничения**
13	**A1**	0	0	0	0	0	30		{=СУММ(B13:F13)-G13}
14	**A2**	0	0	0	0	0	48		-48
15	**A3**	0	0	0	0	0	20		-20
16	**A4**	0	0	0	0	0	30		-30
17	**Объем потребления**	18	27	42	26	15			
18	**Ограничения**	{=СУММ(B13:B16)-B17}	-27	-42	-26	-15			

Рис 1. Транспортная задача (организация данных)

Найдите минимум целевой функции и переменные решения с помощью «Поиска решения» Excel 2010:

Откройте окно диалога «*Параметры поиска решения*»: вкладка Данные →Поиск решения;

в окне диалога «*Параметры поиска решения*» задайте (рис 2.):

Целевая ячейка: I9, -Min;

Изменяя ячейки: B13:F16

Ограничения:

1) B13:F16 >=0;

(перевозки неотрицательны $x_{ij} \geq 0, i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m$)

2) I13:I16=0

(ограничение на количество груза от каждого поставщика $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - a_i = 0$);

3) B18:F18=0

(ограничение на количество груза, каждому потребителю $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - b_j = 0$);

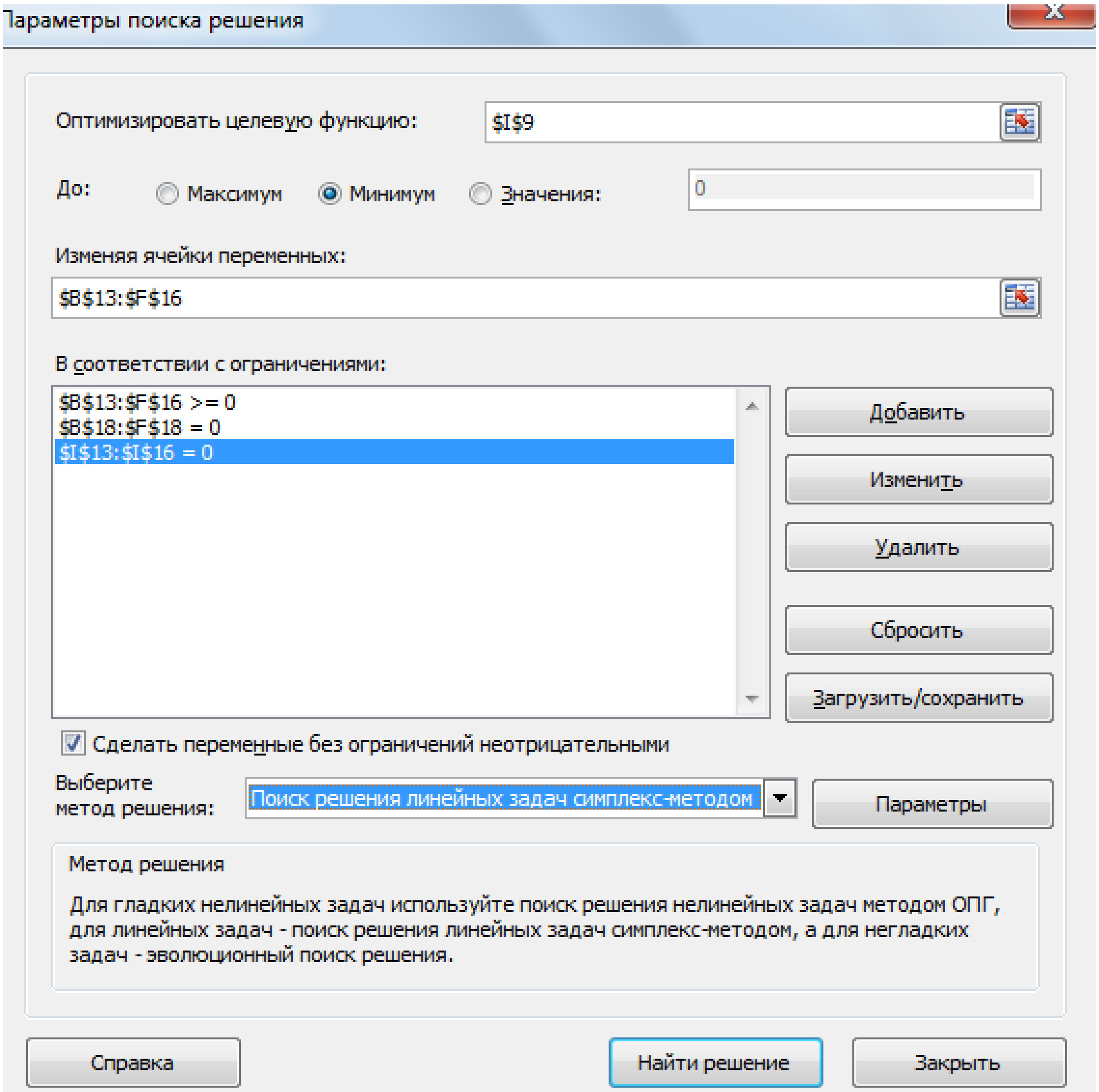


Рис 2. Окно диалога «Параметры поиска решения»

сохраните найденное решение, установив переключатель в нужную позицию в окне диалога «*Результаты поиска решения*» (см. рис 3.)

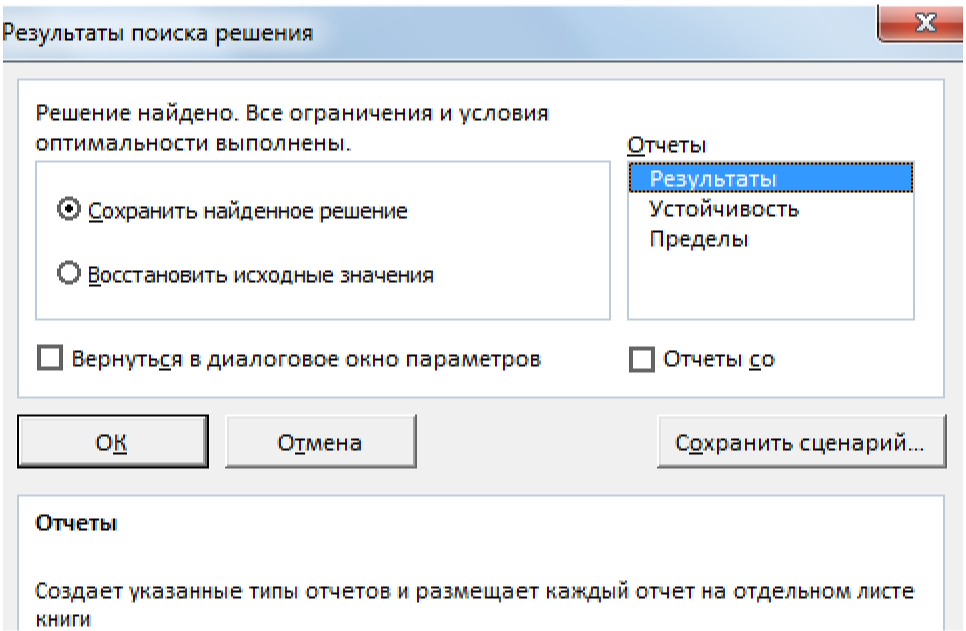


Рис 3.Создание отчета с результатами поиска решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Транспортная задача								
2	Исходные данные								
3		B1	B2	B3	B4	B5	Запасы (объем производства)		
4	A1	13	7	14	7	5	30		180
5	A2	11	8	12	6	8	48		372
6	A3	6	10	10	8	11	20		128
7	A4	14	8	10	10	15	30		300
8	Заказы (Объем потребления)	18	27	42	26	15			
9				Суммарные издержки (ЦФ):					980
10									
11	Переменные решения (матрица перевозок)								
12		B1	B2	B3	B4	B5	Объем производства		Ограничения
13	A1	0	15	0	0	15	30		0
14	A2	0	12	10	26	0	48		0
15	A3	18	0	2	0	0	20		0
16	A4	0	0	30	0	0	30		0
17	Объем потребления	18	27	42	26	15			
18	Ограничения	0	0	0	0	0			

Рис 4. Результаты решения, полученные с помощью Побора параметра

Решение задачи о назначениях MS Excel

Задача. Имеется **n** рабочих и **m** видов работ. Стоимость c_{ij}, выполнения **i** рабочим **j** работы приведена в таблице, где рабочему соответствует строка, а работе столбец. Необходимо составить план выполнения работ таким образом, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а сумма стоимости выполнения работ была минимальной.

Рабочие	**Виды работ**					**Кол-во рабочих**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	6	2	5	11	1 (a1)
A_2	1	2	7	11	3	1 (a2)
A_3	5	12	11	9	1	1 (a3)
A_4	2	4	2	10	5	1 (a4)
Кол – во работ	1 (b1)	1(b2)	1(b3)	1 (b4)	1 (b5)	

Математическая постановка задачи о назначениях:

ЦФ: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \times x_{ij} \to \min$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=1,\ldots,m$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если рабочий i не назначен на работу j} \\ 1, & \text{если рабочий i назначен на работу j} \end{cases}$$

Наша задача является не сбалансированной т.к. $\sum_{i=1}^{4} a_i \neq \sum_{j=1}^{5} b_j$:

количество работ превышает количество рабочих, поэтому вводится дополнительный рабочий с заведомо высокими штрафными стоимостями выполнения работ (строка в таблице стоимостей выполнения работ).

Решение задачи с помощью MS Excel

Организуйте данные так, как это показано на рис 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Задача о назначениях**								
2	***Исходные данные***								
3		***Виды работ***					**Кол-во рабочих**		
4		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**			
5	**A1**	3	6	2	5	11	1		{=СУММПРОИЗВ(B5:F5;B16:F16)}
6	**A2**	1	2	7	11	3	1		0
7	**A3**	5	12	11	9	1	1		0
8	**A4**	2	4	2	10	5	1		0
9	**A5 доп.**	13	13	13	13	13	1		0
10	**Кол-во работ**	1	1	1	1	1			
11				**Суммарные издержки (ЦФ):**					**{=СУММ(I5:I9)}**
12									
13	***Переменные решения***								
14		***Виды работ***					**Кол-во рабочих**		
15		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**			**Ограничения**
16	**A1**	0	0	0	0	0	1		**{=СУММ(B16:F16)-G16}**
17	**A2**	0	0	0	0	0	1		-1
18	**A3**	0	0	0	0	0	1		-1
19	**A4**	0	0	0	0	0	1		-1
20	**A5 доп.**	0	0	0	0	0	1		-1
21	**Кол-во работ**	1	1	1	1	1			
22	**Ограничения**	**{=СУММ(B16:B20)-B21}**	-1	-1	-1	-1			

Рис 1. Задача о назначениях (организация данных)

Найдите минимум целевой функции и переменные решения с помощью «Поиска решения» Excel :

1. Откройте окно диалога «*Параметры поиска решения*»: вкладка Данные →группа элементов Анализ → Поиск решения ;
2. в окне диалога «*Параметры поиска решения*» задайте (рис 2.);

Целевая ячейка: I11, -Min;
Изменяя ячейки: B16:F20
Ограничения:
1) B16:F20 – является двоичным
($x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,m$)

2) I16:I20=0 (ограничение на количество рабочих для выполнения работ $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - a_i = 0$);

3) B22:E22=0 (ограничение на количество работ для каждого рабочего $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - b_j = 0$);

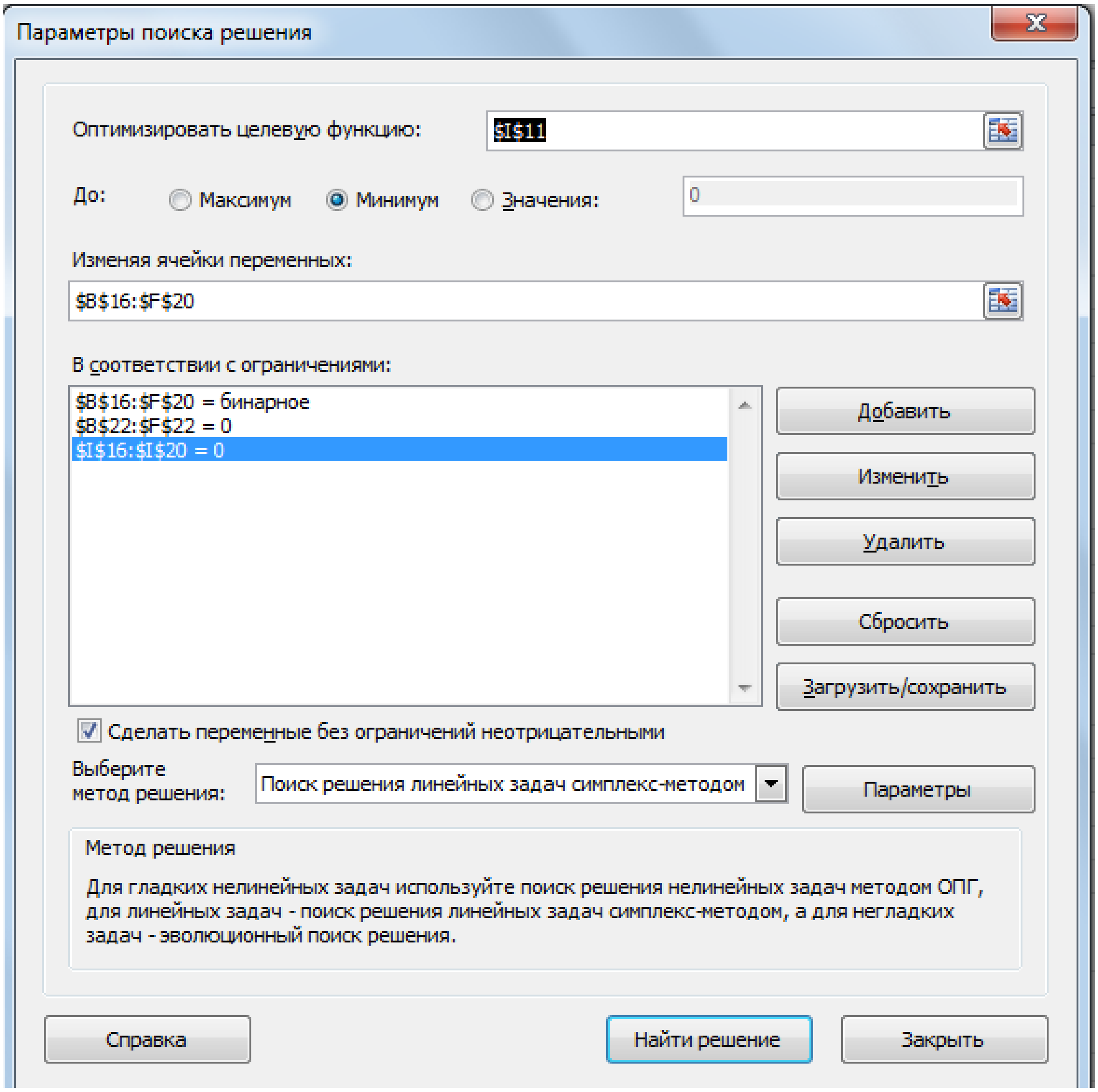


Рис 2. Задание ограничений в окне диалога Параметры поиска решения

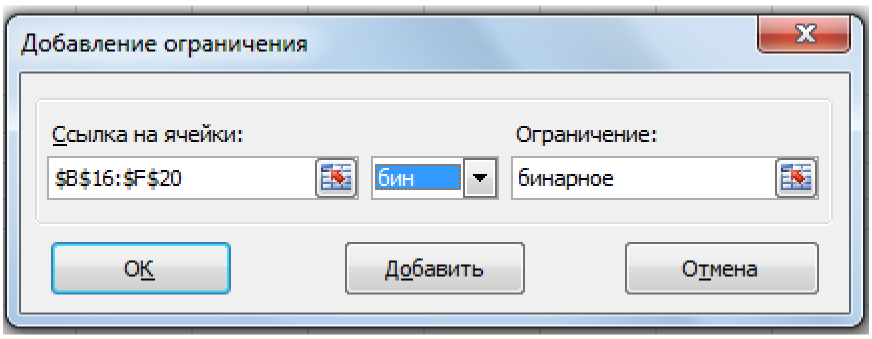


Рис 3. Добавление первого ограничения

сохраните найденное решение установив переключатель в нужную позицию в окне диалога «*Результаты поиска решения*»

I11 | =СУММ(I5:I9)

Исходные данные

	Виды работ					Кол-во рабочих	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	3	6	2	5	11	1	2
A2	1	2	7	11	3	1	2
A3	5	12	11	9	1	1	1
A4	2	4	2	10	5	1	2
A5 фик.	13	13	13	13	13		13
Кол-во работ	1	1	1	1	1		
			Суммарные издержки (ЦФ):				20

Переменные решения

	Виды работ					Кол-во рабочих	Ограничения
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	0	0	1	0	0	1	0
A2	0	1	0	0	0	1	0
A3	0	0	0	0	1	1	0
A4	1	0	0	0	0	1	0
A5 фик.	0	0	0	1	0	1	0
Кол-во работ	1	1	1	1	1		
Ограни-чения	0	0	0	0	0		

Рис 4. Результаты решения задачи с помощью Подбора параметра

Вывод: рабочий A_1 выполнил работу B_3, рабочий A_2 выполнил работу B_2, рабочий A_3 выполнил B_5, рабочий A_4 выполнил B_1. Работа B_4 остается не выполненной. Суммарная стоимость работ $Z(\bar{x}) = 20$ у.е. Штраф за не выполнение работы 13 у.е. Реальная стоимость работ составляет 7 у.е.

$Z(\bar{x})$=2+2+1+1+13=20 у.е.

Задания для самостоятельной работы

(вариант выбирается по последней изменяемой цифре номера зачетной книжки)

Задача № 1. Задача планирования производства

Завод выпускает два вида дорожных плит (**I** и **II**). Для их изготовления используется два вида сырья (**A**,**B**), запасы которых составляют $6+2\times\alpha$ и $8+2\times\alpha$ т. Расходы сырья для плиты **I** составляют 1т. и 2т., соответственно, для вида **II** 2т. и 1т**.** Изучение рынка сбыта показало, что спрос на плиты вида **I** не превышает $\alpha+1$ шт. Оптовые цены одной плиты равны: $20+\alpha$ долл. для плиты вида **I**, $30+\alpha$ долл. для плиты вида **II**. Какое количество плит каждого вида надо производить заводу, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

(α - последняя цифра номера зачетки)

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу, используя графический метод решения задач линейного программирования.
3. Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Задача № 2.

Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Вид сырья	**Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие**		**Общее количество сырья (кг)**
	A	B	
1	12+α	4+α	300+2*α
2	4+α	4+α	120+2*α
3	3+α	12+α	252+2*α
Прибыль от реализации одного изделия (руб)	30+α	40+α	

(α - последняя цифра номера зачетки)

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу, используя табличную реализацию симплекс – метода (методом укороченных таблиц).
3. Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Задача № 3.

Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3+α фунта азотных, 4+α фунта фосфорных и 1+α фунта калийных удобрений, а в улучшенный – 2+α фунта азотных, 6+α фунтов фосфорных и 3+α фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10+2*α фунтов азотных, 20+2*α фунтов фосфорных и 7+2*

α фунтов калийных удобрений. Обычный набор стоит 3+α долл., а улучшенный – 4+α долл. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

(α - последняя цифра номера зачетки)

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Задача № 4. Оптимальный план перевозок грузов (транспортная задача)

На трех станциях отправления А, Б, С имеется соответственно 50, 20 и 30 ед. однородного груза, который нужно доставить в пять пунктов назначения согласно их потребностям. Эти данные, а также стоимость перевозки единицы груза от каждой станции отправления к каждому пункту назначения указаны в таблице. Составить такой план перевозок грузов, чтобы затраты на эти перевозки были минимальными.

Пункты отправления	**Пункты назначения**					**Запасы груза**
	П1	**П2**	**П3**	**П4**	**П5**	
А	4	1	2	3	3	50
Б	3	1	5	2	4	20
С	5	6	1	4	2	30
Объемы потребления	30	5	25	15	25	

Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Задача № 5. Минимизация транспортных издержек (транспортная задача)

Менеджер транспортного отдела составляет план перевозок продукции фирмы в стандартных контейнерах на следующий месяц. Цены перевозок одного контейнера, величина заказов и запасы на складах даны в таблице. Имеется 9 заказов от 9 потребителей. Заказы в сумме превышают запас на складах С1,…,С7. Найдите план перевозок, минимизируюший транспортные издержки.

(α - последняя цифра номера зачетки)

Склады	**Клиенты (потребители)**									**Ресурсы (запасы на сладах)**
	К1	**К2**	**К3**	**К4**	**К5**	**К6**	**К7**	**К8**	**К9**	
С1	14	7	10	7	3	12	7	2	14	7+α
С2	10	4	16	15	16	9	10	6	12	10+α
С3	10	11	9	6	7	11	15	8	11	12+α
С4	9	12	3	8	5	17	16	17	13	8+α
С5	3	12	8	17	5	13	16	8	3	2+α
С6	13	9	11	5	17	7	17	17	16	5+α
С7	3	6	10	18	14	12	8	9	7	6+α
Заказы (объемы потребления)	5+α	11+α	5+α	9+α	3+α	6+α	9+α	4+α	8+α	

Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Задача № 6. Задача о назначениях

Имеется **n** рабочих и **m** видов работ. Стоимость c_{ij}, выполнения **i** рабочим **j** работы приведена в таблице, где рабочему соответствует строка, а работе столбец. Необходимо составить план выполнения работ таким образом, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а сумма стоимости выполнения работ была минимальной.

Решить задачу, используя средства поиска решения электронных таблиц Excel.

Вариант 1 (последняя цифра номера зачетки 1 или 6)

Рабочие	**Виды работ**					**Кол-во рабочих**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	3	6	5	7	1
A_2	5	2	7	8	3	1
A_3	3	5	1	9	2	1
A_4	6	4	2	10	5	1
Кол – во работ	1	1	1	1	1	

Вариант 2 (последняя цифра номера зачетки 2 или 7)

Рабочие	**Виды работ**					**Кол-во рабочих**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	4	8	5	7	1
A_2	1	2	9	8	3	1
A_3	3	8	1	9	2	1
A_4	3	4	2	4	5	1
Кол – во работ	1	1	1	1	1	

Вариант 3 (последняя цифра номера зачетки 3 или 8)

Рабочие	Виды работ				Кол-во рабочих
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	6	2	5	1
A_2	5	2	9	8	1
A_3	3	8	1	9	1
A_4	1	4	2	3	1
A_5	3	7	10	5	
Кол – во работ	1	1	1	1	

Вариант 4 (последняя цифра номера зачетки 4 или 9)

Рабочие	Виды работ				Кол-во рабочих
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	3	2	7	1
A_2	5	4	9	8	1
A_3	7	8	1	10	1
A_4	1	9	10	3	1
A_5	2	7	8	5	
Кол – во работ	1	1	1	1	

Вариант 5 (последняя цифра номера зачетки 5 или 0)

Рабочие	Виды работ					Кол-во рабочих
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	8	6	2	7	1
A_2	6	2	9	8	3	1
A_3	3	7	1	10	5	1
A_4	9	10	2	3	4	1
Кол – во работ	1	1	1	1	1	

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная электронная литература

1. Семенов, А. Д. Математические модели систем управления: учебное пособие / А. Д. Семенов, А. В. Волков, О. В. Ермилина. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. - 200 с. - ISBN 978-5-9729-0889-9. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1903133.
2. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под редакцией В. В. Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 328 с. — ISBN 978-5-9916-3698-8. — URL: https://urait.ru/bcode/507819.

Дополнительная электронная литература

1. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Плотникова.- Изд. испр. и доп.- М.: Вузовский учебник, 2008.- 365с.- ISBN 978-5-9558-0052-3.
2. Нюркина, Э. Е. Экономико-математические методы и модели в решении экономических и транспортных задач / Э. Е. Нюркина. — Нижний Новгород: ВГУВТ, 2016. — 116 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/97179
3. Минько, Р. Н. Организация производства на транспорте: Учебное пособие / Р.Н.Минько - Москва: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 160 с. – Режим доступа:https://znanium.com/read?id=203829
4. Василенко, М. Н. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие / М. Н. Василенко, А. М. Горбачев, Д. В. Новиков. — Санкт-Петербург: ПГУПС, 2016. — 61 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/91103
5. Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс]: учебник / А.И. Новиков. — Электрон. дан. — Москва: Дашков и К, 2017. — 532 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/77298
6. Крыжановский, Г. А. Моделирование транспортных процессов : учебное пособие / Г. А. Крыжановский. — Санкт-Петербург : СПбГУ ГА, 2014. — 262 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/145484
7. Карасев, С. В. Математическое моделирование систем и процессов на транспорте : учебное пособие / С. В. Карасев, Д. В. Осипов, Д. А. Сивицкий. — Новосибирск : СГУПС, 2020. — 136 с. — Режим доступа: https://reader.lanbook.com/book/164609#5

Internet-ресурсы:

1. http://window.edu.ru –Каталог образовательных Internet- ресурсов;
2. http://znanium.com - Электронно-библиотечная система Znanium.com (Нижневартовск);
3. https://e.lanbook.com - Электронно-библиотечная система Издательства Лань.